Měření a informace v moderní optice

Jaroslav Řeháček

katedra optiky

PřF UP

obsah

- nastínění problematiky měření
- aplikace tomografie v kvantové a klasické optice
- neznámé měřicí zařízení
- informačně neúplné měření
- charakterizace kvality měření

Jan Peřina

Zdeněk Hradil

Zdeněk Bouchal

Bohumil Stoklasa

Libor Moťka

Martin Paúr

Dominik Koutný

Yong Siah Teo

Vítězslav Karásek

- Max-Planck-Institut für die Physik des Lichts, Erlangen
- Universidad Complutense, Madrid
- Centre for Quantum Technologies, NUS Singapore
- Universität Paderborn

- Meopta – optika, s.r.o.
- PRAMACOM-HT, spol s r.o.

T A
Č R
Program Centra kompetence

IGA UP

GAČR
GRANTOVÁ AGENTURA ČESKÉ REPUBLIKY

měření

obecné schéma

signál		měření		data		estimátor/odhad
ρ	$\longrightarrow$	A	$\longrightarrow$	f	$\longrightarrow$	$\hat{\rho}(f)$

každá funkce dat je odhad

speciální případy

- nevychýlený/nestranný o.
- konzistentní o.
- efektivní o.
- lineární o.

bodový odhad

optimalizace odhadu

- penalizace $C(\rho, \hat{\rho})$
- minimalizace rizika

speciální volba

$$C(\rho, \hat{\rho}) \propto -\delta(\rho - \hat{\rho})$$

- vede na maximalizaci věrohodnosti

$$L(\rho) = p(f \mid \rho)$$

- asymptoticky efektivní odhad

informační úplnost

uvažujme lineární model

$$A\,\rho = p$$

měření $N \times d$

stav $d \times 1$

očekávaný výsledek měření $N \times 1$

N rovnic pro d neznámých plus další vazby, např. $\rho \geq 0$

informačně úplné měření (IC)

$$\rho_1 \neq \rho_2 \;\Rightarrow\; A\,\rho_1 \neq A\,\rho_2$$

LIN odhad

realistická detekce

$$p \rightarrow \hat{p} = f$$

IC měření

- minimální $N = d$
- přeurčené $N > d$

$$\hat{\rho}_{\mathrm{LIN}} = A^{-} f$$ OLS popř. GLS

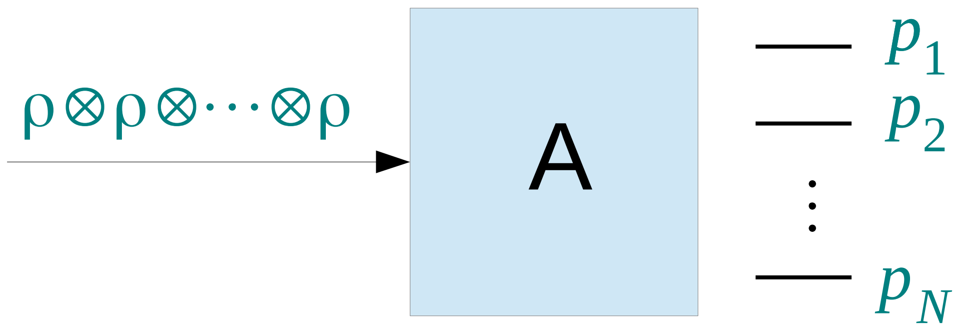
LIN odhad je často BLUE (best linear unbiased estimator)

ale

LIN odhad nezahrnuje vazby – problematické z hlediska fyz. interpretace

příklad 1: měření kvantového stavu

charakterizace přípravy kvantového stavu



– lineární model

– věrohodnost je obvykle konkávní funkcí stavu

– maximalizace konkávní funkce na konvexní množině

$$\hat{\rho} = \arg\max_{\rho} L(\rho) \quad \text{s.t.} \quad \rho \succcurlyeq 0, \quad \mathrm{Tr}\,\rho = 1$$

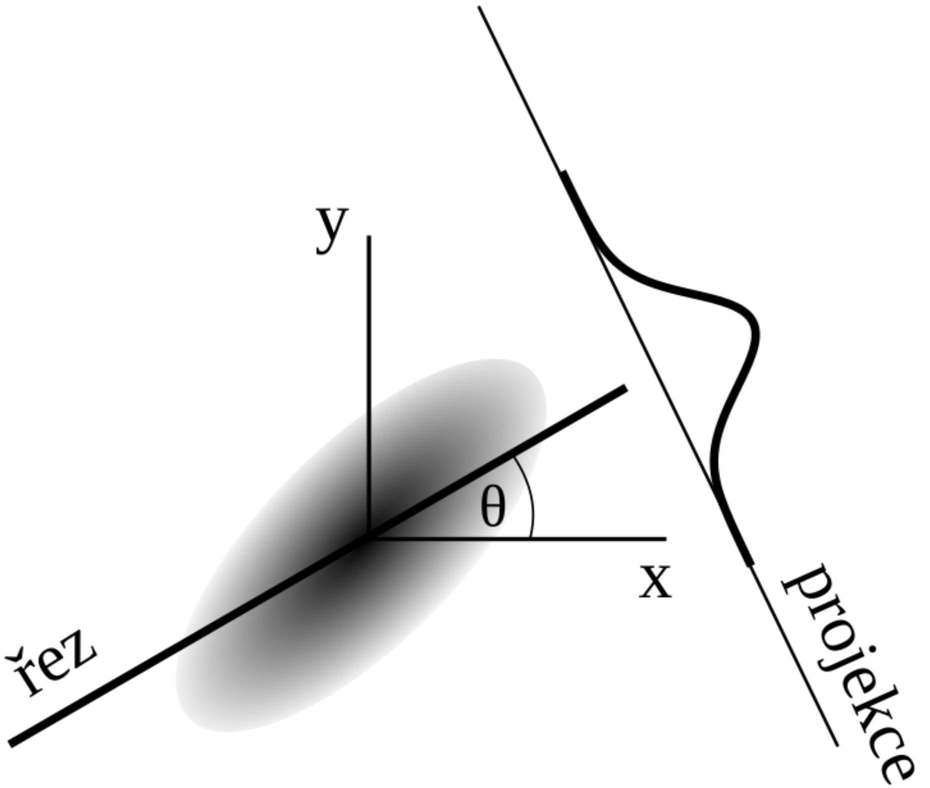
– konvexní problém

tomografie

rekonstrukce 2D objektu z 1D projekcí

2D ➔ 1D

- projekce / marginální rozdělení
- řez / podmíněné rozdělení



přímá inverze

FT projekce objektu = řez FT objektu

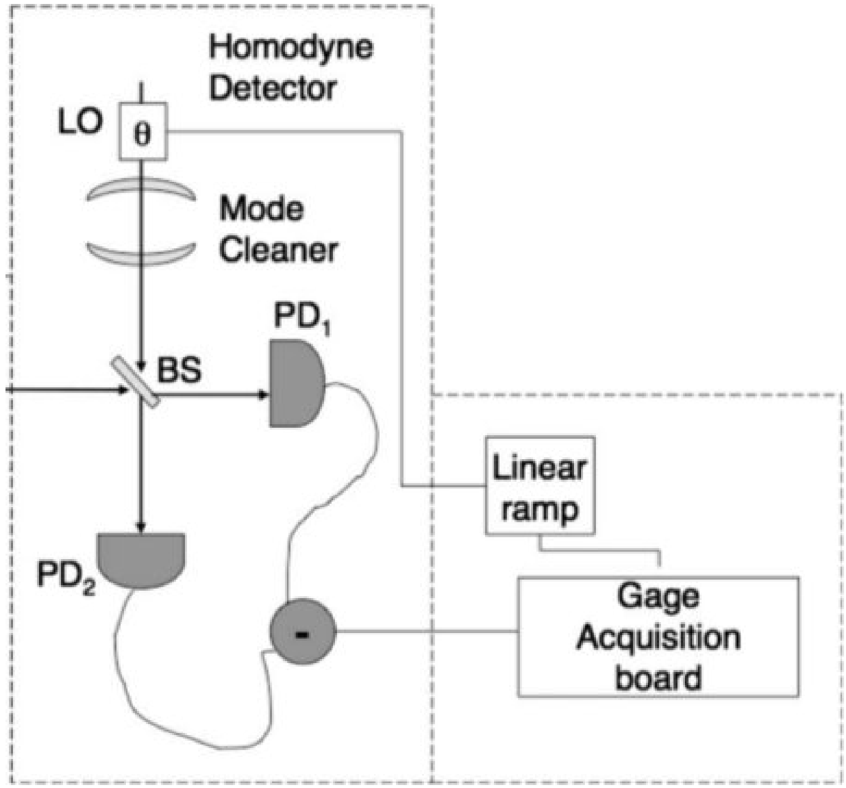
tomografie ...

fázový prostor – Wignerova funkce $W(x, y)$

- zobecnění klasické rozdělovací funkce
- kvazidistribuce
- marginální rozdělení

$$x_\theta = x \cos\theta + y \sin\theta$$

kvadratury



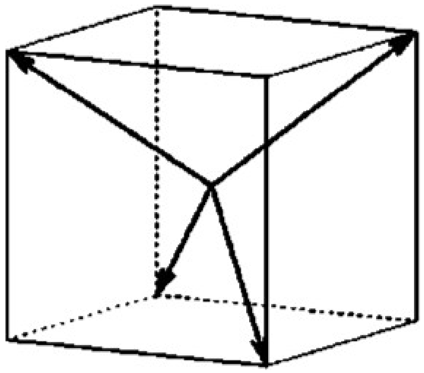
homodynní detekce

- měření x_θ
- t.j. měření projekcí Wignerovy funkce
- tomografie umožňuje odhad Wignerovy funkce z homodynních dat

některé koncepty IC měření

symetrické IC měření (SIC)

- $N = \dim^2$ subnormalizovaných projektorů s konstantními překryvy
- netriviální konstrukce ale zřejmě existují v každé dimenzi



MUB měření

- $\dim + 1$ vzájemně komplementárních bází
- prvočíselné dimenze a jejich mocniny
- např. elipsometrie v $\dim = 2$

náhodné měření

- N náhodných projekcí
- optimální m. pro $N \rightarrow \infty$ (kovariantní m.)

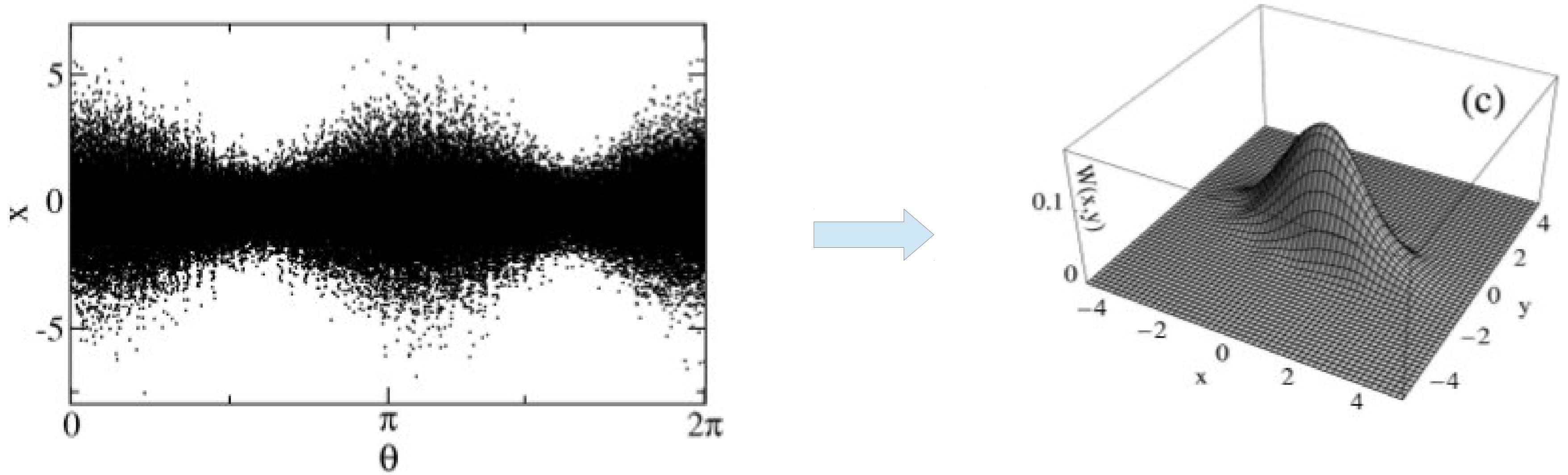
měření gaussovských stavů

Wignerova funkce je 2D normální rozdělení pro x, y

- kovarianční matice G
- variance měřených kvadratur jsou projekce G

$$\sigma_\theta^2 = \langle u_\theta | G | u_\theta \rangle$$

- tedy obdobně jako u měření stavu $\dim = 2$ ovšem s jinými vazbami



Physical Review A 79, 032111 (2009)

měření prostorové koherence

optické svazky = stavy prostorových stupňů volnosti světla

korespondence mezi kvantovou teorií a vlnovou optikou

koherentní signál (vlna) ➜ čistý stav $U(x) = \langle x | U \rangle$

částečně koherentní signál ➜ smíšený stav – koherenční matice ρ

vzájemná intenzita $\Gamma(x, x') = \langle x | \rho | x' \rangle$

popis měření $I = \mathrm{Tr}(\rho \Pi)$ např. CCD kamera $I(x) \approx \langle x | \rho | x \rangle$

obdobné vazby jako v kvantové teorii $\rho \geqslant 0$

Shackův-Hartmannův senzor

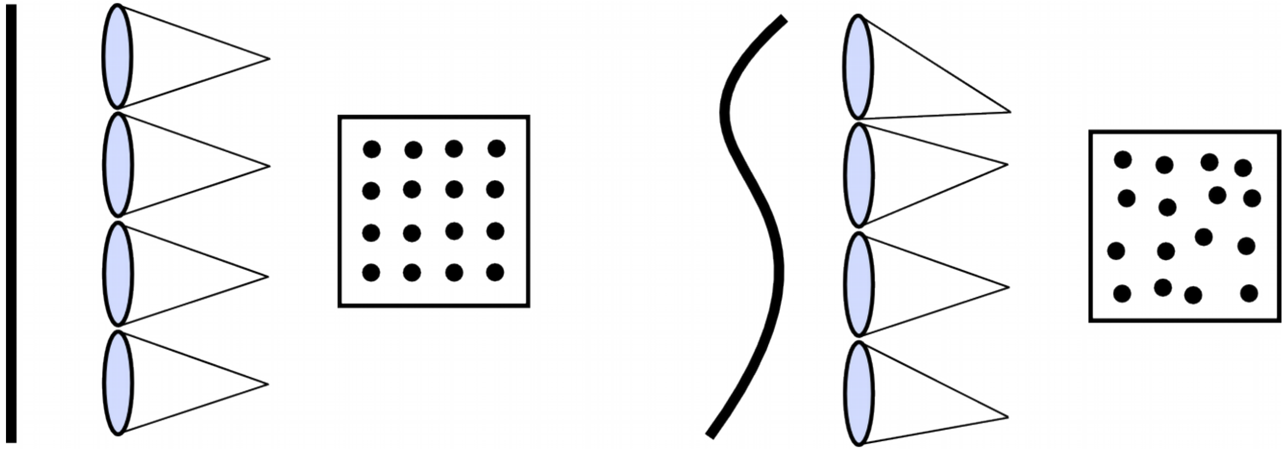
senzor vlnoplochy

metrologie

- kontrola optických ploch
- měření parametrů

adaptivní optické systémy

- korekce atmosférické turbulence (astronomie, vojenské aplikace) ...



princip S-H detekce

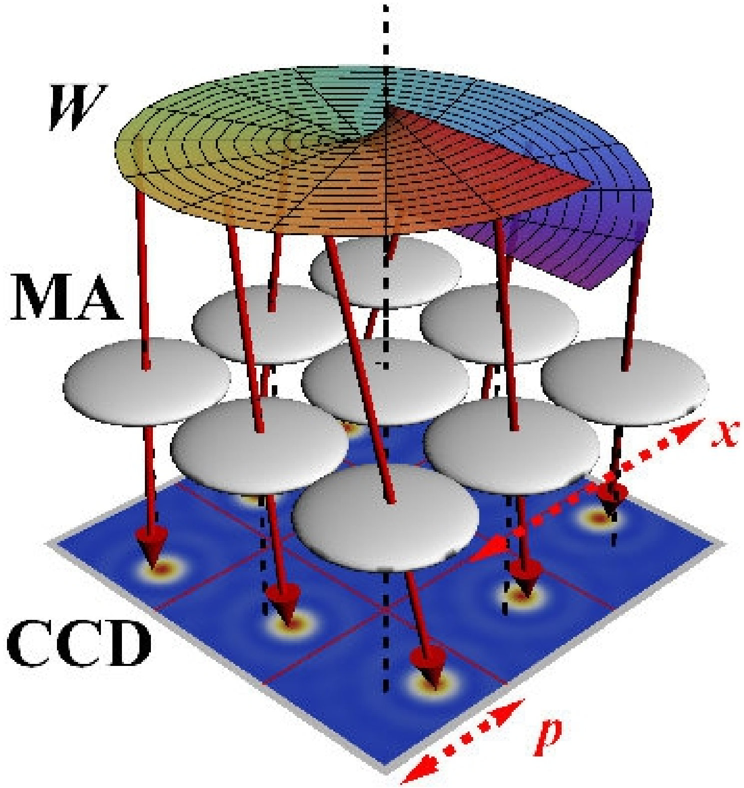
S-H tomografie

současné měření polohy a hybnosti

speciální případy

- malé pupily ~ měření polohy
- velké pupily ~ měření hybnosti
- gaussovská apodizace

$$I(\alpha) = \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle \propto Q(\alpha)$$ Q-funkce



S-H detekce je IC schéma $\longrightarrow$ úplná charakterizace koherence 2. řádu

Physical Review Letters 105, 010401 (2010)

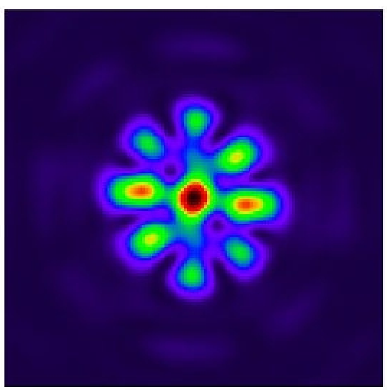
3D zobrazování

šíření částečně koherentního signálu

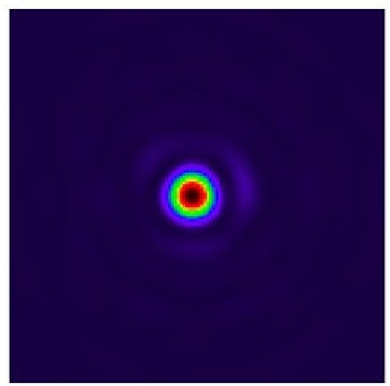
$$\Gamma(x_1, x_1') \longrightarrow h(x_2, x_1) \longrightarrow I(x_2)$$

vstup | impulsní odezva | výstup

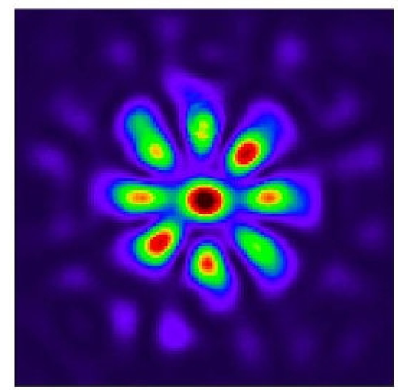
částečně koherentní vírové pole



tomo + digitální šíření



transport intenzity (HASO)

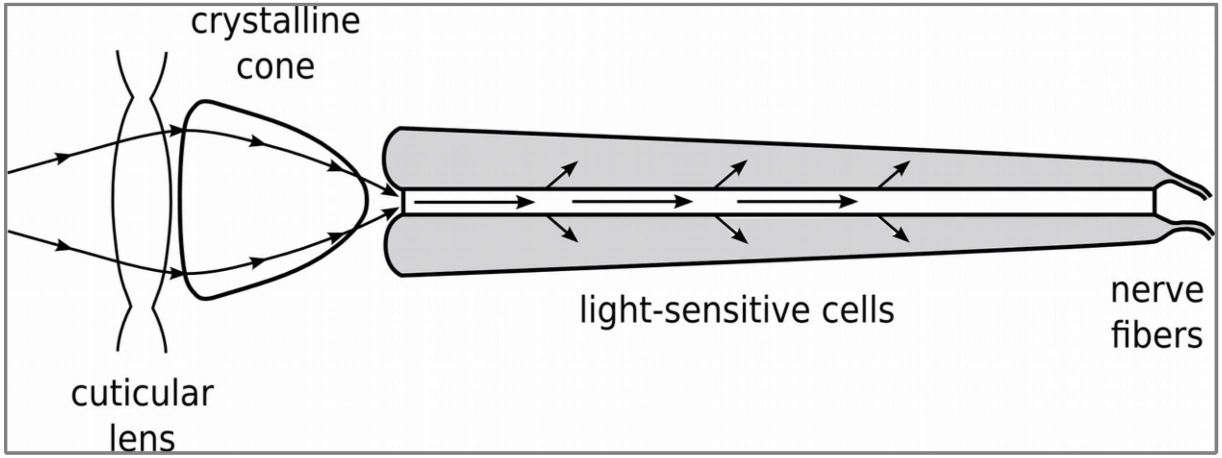


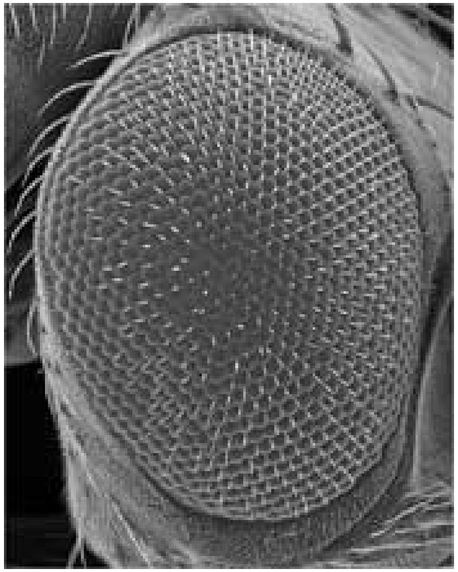
skutečnost

Nature Communications 5, 3275 (2014)

3D zobrazování ...

složené oko hmyzu





- moucha postrádá schopnost akomodace
- pokud však zachází s dostupnou informací správně, může vidět lépe než si myslíme!

neznámý měřící aparát

charakterizace neznámého signálu neznámým měřením

- měřím sadu známých signálů (sond) $\{\rho_i\} \longrightarrow$ datové vzory $\{f_i\}$
- měřím neznámý signál $\rho \longrightarrow$ data f

standardní postup

- rekonstrukce měření $\{\rho_i\} + \{f_i\} \rightarrow A$
- rekonstrukce stavu $A + f \rightarrow \rho$

tomografie metodou fitování datových vzorů (data-pattern tomography)

- měření samotné nás nezajímá
- obchází rekonstrukci měření

neznámý měřící aparát...

linearita systému

$$f \approx \sum_i x_i f_i \qquad \hat{\rho} = \sum_i x_i \rho_i, \quad \hat{\rho} \geqslant 0, \ \ \mathrm{Tr}\,\hat{\rho} = 1$$

fitování vzorů + stejná lin. kombinace sond

vede na konvexní problém

- typické sondy: koherentní stavy, rovinné vlny ...
- měřené sondy určují “zorné pole” metody

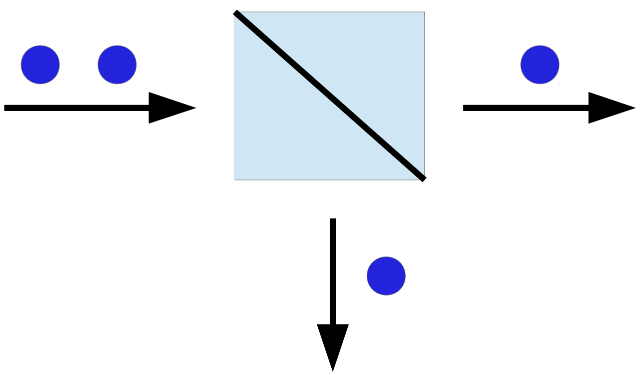
experimentální implementace:

M. Cooper, M. Karpinski, B.J. Smith (Calendon Lab Oxford), *Local mapping of detector response for reliable quantum state estimation,* Nature Communciations 5, 4332 (2014)

Physical Review Letters 105, 010402 (2010)

TMD

časový multiplex (Time-Multiplexed Detection)



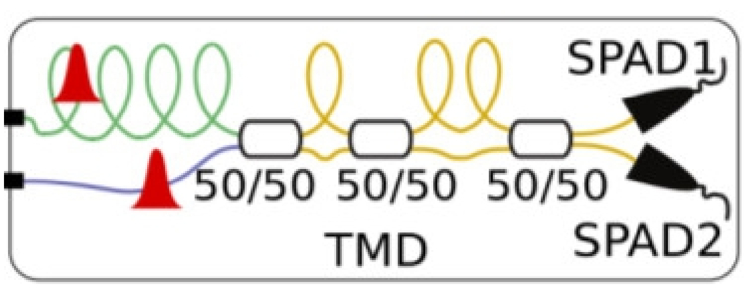
00
01
10
11

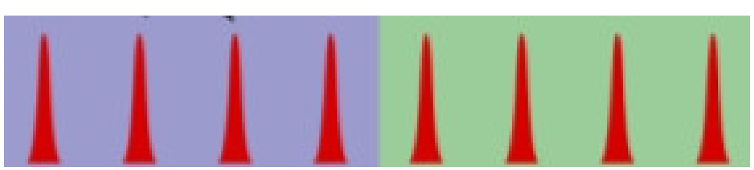
detekční
pravděpodobnosti

$$A\rho = p$$

fotopulsní rozdělení

vláknové děliče + časové zpoždění





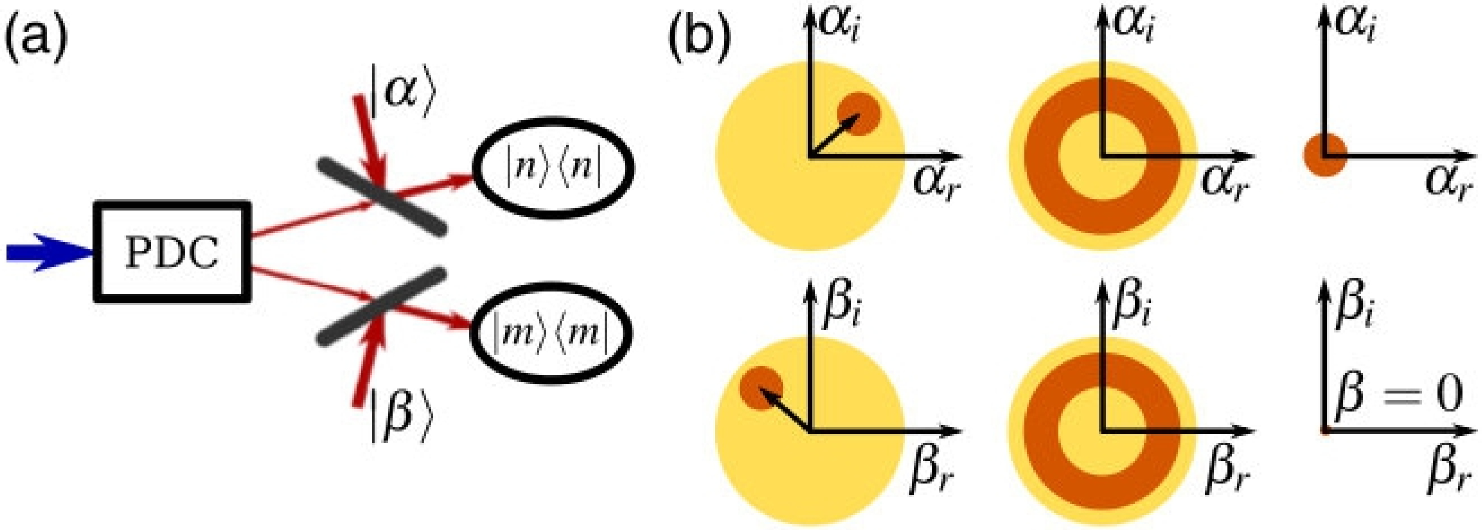
0 0 1 0 1 0 0 0

s děličů $\longrightarrow$ $N = 2^s$ nezávislých detekcí (ideálně)

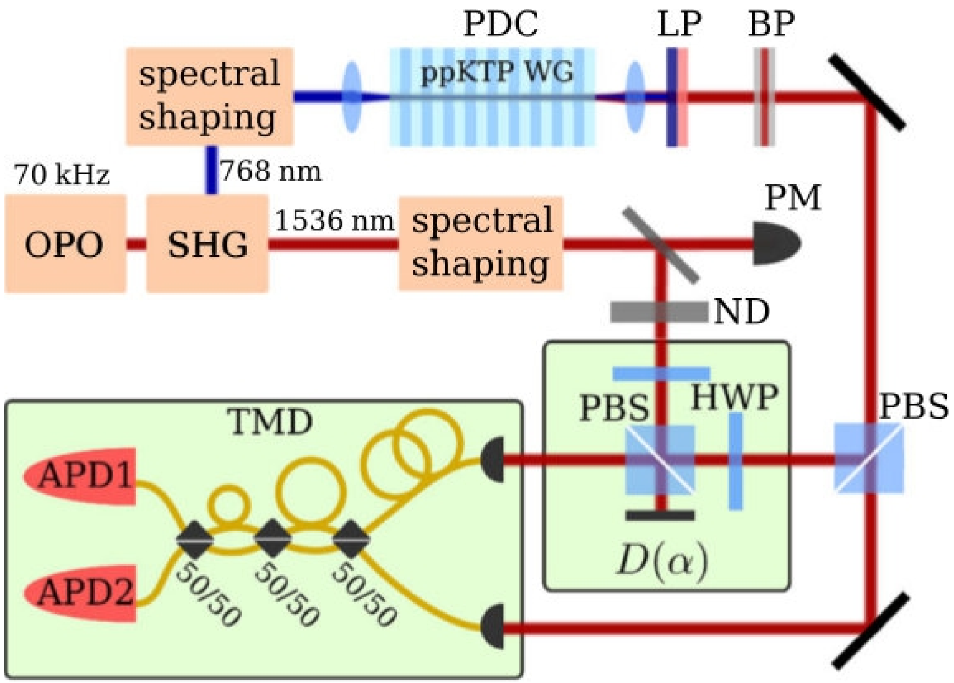
přímé vzorkování Wignerovy funkce

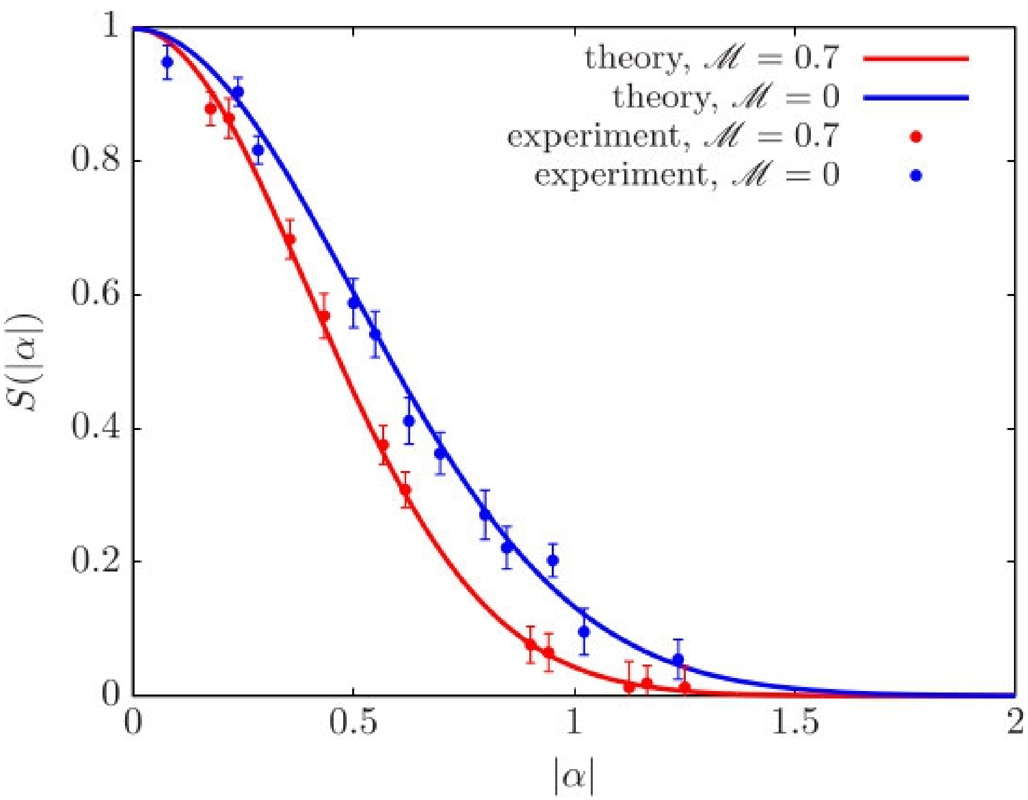
fotopulsní rozdělení → parita $S=\sum_n (-1)^n \rho_n$ → $W(0,0)$

posunuté stlačené dvoumódové vakuum



přímé vzorkování





Physical Review Letters 116, 133601 (2016)

informačně neúplná detekce

nejednoznačné řešení $\longrightarrow$ výběr řešení s největší entropií

může selhat pro vzájemně nekonzistentní vazby

alternativní postup

- jedno optimální řešení $\longrightarrow$ konzistentní data
- maximalizace entropie

nebo

maximalizace $\underbrace{L(\rho)}_{\text{znalost}} + \epsilon \underbrace{S(\rho)}_{\text{entropie} \sim \text{ignorance}}$

Physical Review Letters 107, 020404 (2011)

komprimované snímání

neúplné měření může být úplné pro jednoduché signály

- řídký signál
- optimalizace s pomocí řídkost poporujících vektorových norem $l_0,\ l_1$

zobecnění do kvantové teorie

- nukleární norma $\|\rho\|_1 = \sum_k s_k$
- pro kvantové stavy $\|\rho\|_1 = 1$
- odhad s podmínkou pozitivity je v tomto smyslu komprimované snímání

A. Kalev, R.L. Kosut, I.H. Deutsch, Npj Quantum Information 1, 15018 (2015).

kvalita měření

obvyklá míra chyby odhadu – střední kvadratická chyba (MSE)

$$e^2 = \langle (\rho - \hat{\rho})^2 \rangle$$ pro jeden parametr

$$e^2 = \langle \|\rho - \hat{\rho}\|_F^2 \rangle$$ pro kvantový stav (H-S vzdálenost)

Cramérova-Raova dolní mez (CRLB)

- dolní mez pro chybu nevychýleného odhadu
- lze dosáhnout asymptoticky (ML ...)

Scientific Reports 5, 12289 (2015)

kvalita měření

pro dané měření: “klasická” mez

optimalizace přes měření: “kvantová” mez

středování přes stavy: kvalita daného měření

příklady:

SIC $e^2_{\mathrm{SIC}} \propto \dim^2$

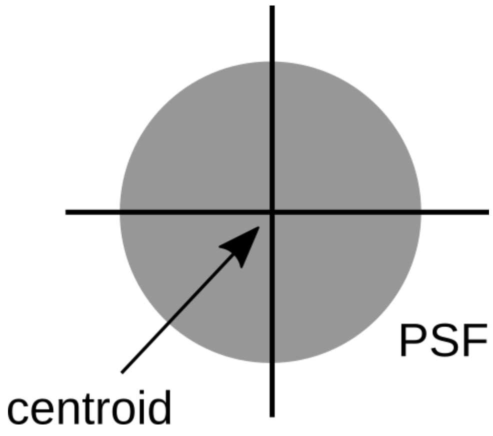
MUB $e^2_{\mathrm{MUB}} \propto \dim^2 < e^2_{\mathrm{SIC}}$

kovariantní m. $e^2_{\mathrm{opt}} = 2\left(\dim - 1\right)$

rozlišení nekoherentních bodových zdrojů

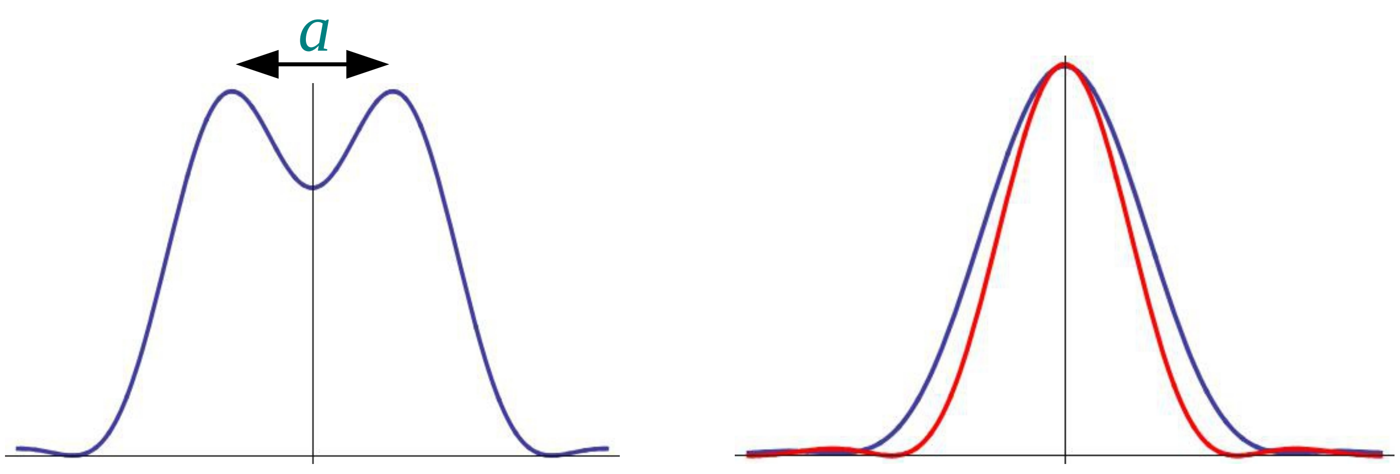
lokalizace bodového zdroje

- libovolně přesná lokalizace
- měření polohy (CCD) dosahuje kvantové meze
- např. astrometrie, fluorescenční mikroskopie



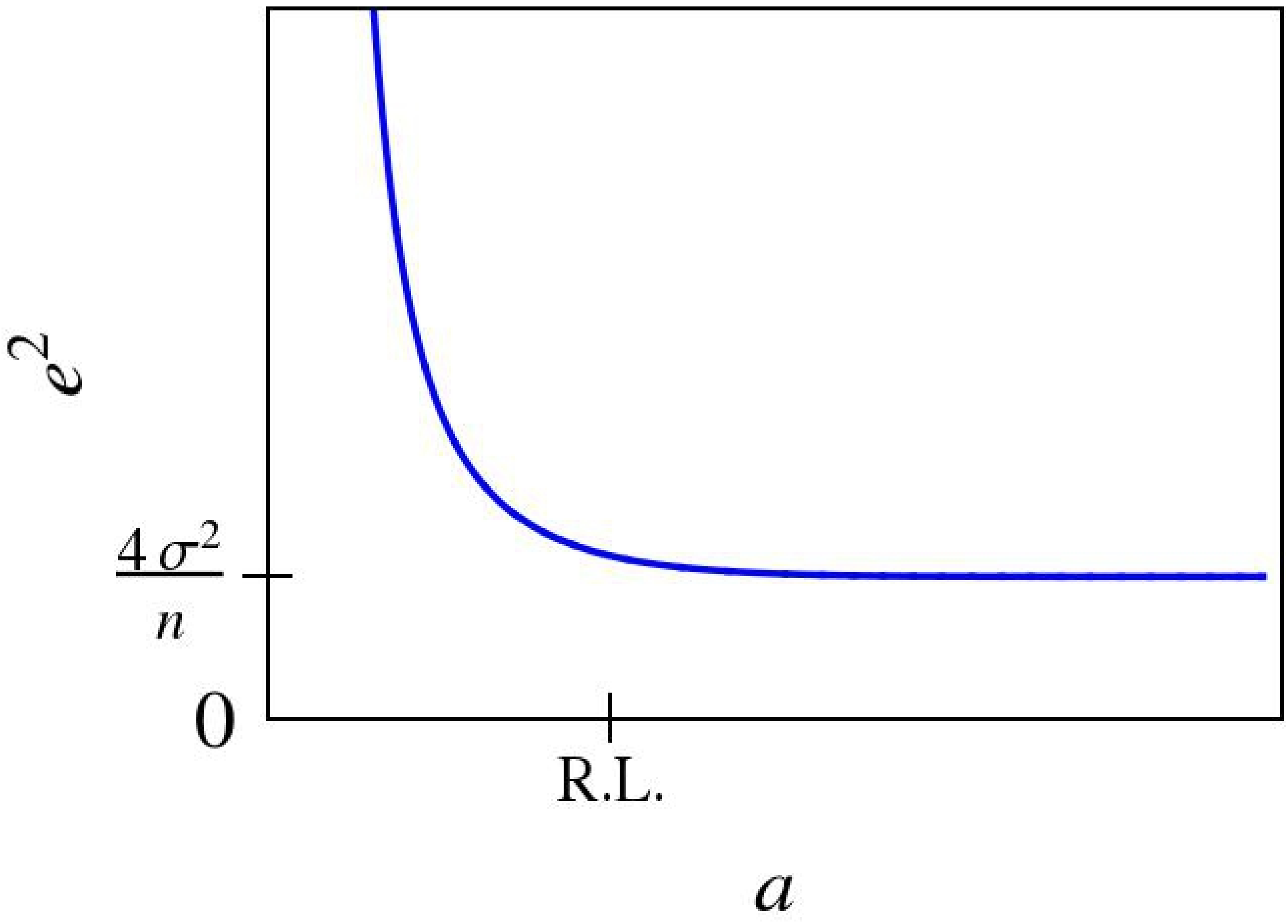
dva zdroje

- superrozlišení
- v jakém smyslu Rayleighův limit skutečně limituje rozlišení?



rozlišení ...

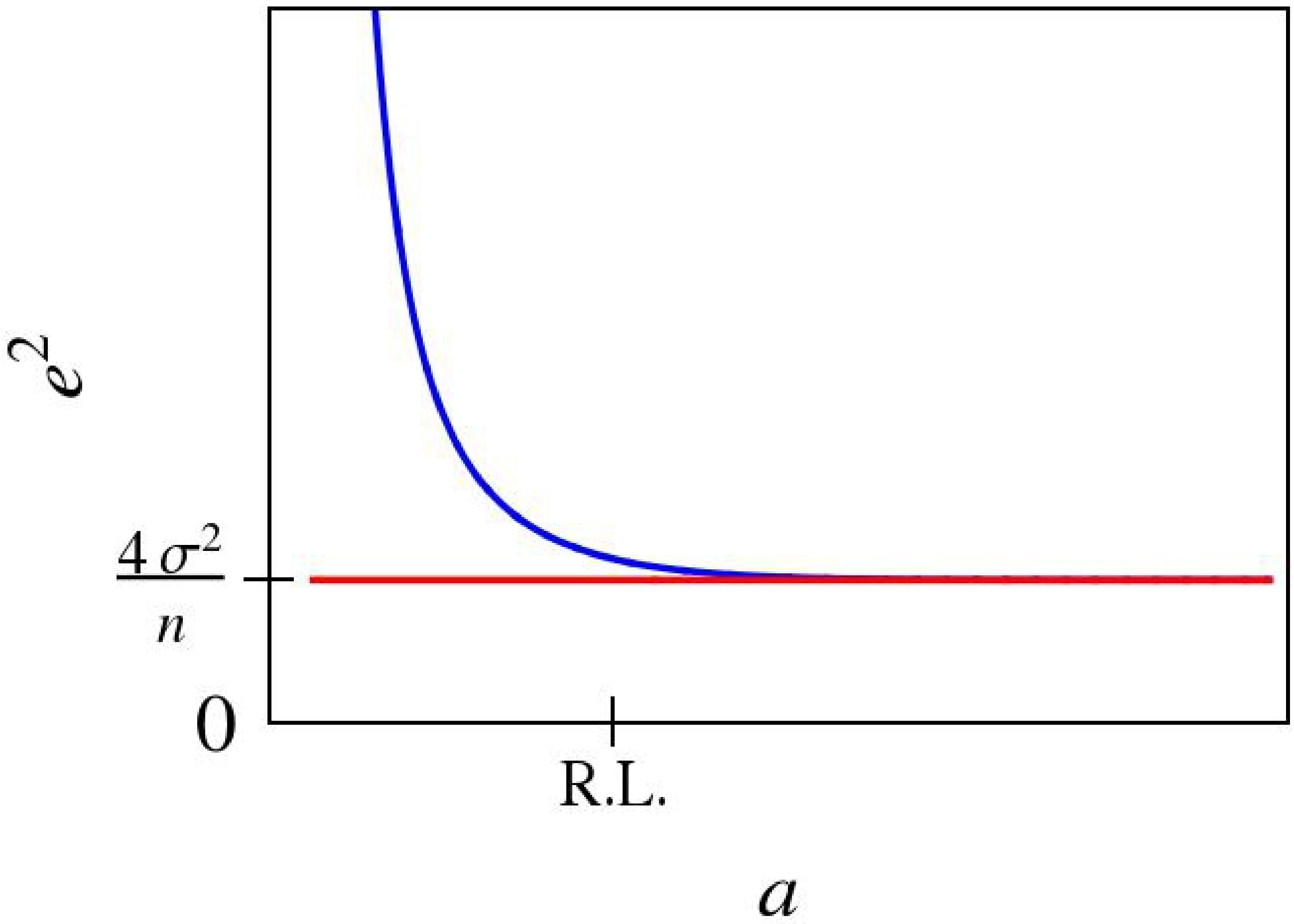
CCD detekce – klasická mez



výrazné překonání R.L. je obtížné

rozlišení ...

optimální detekce – kvantová mez



stejné chování jako pro lokalizaci jednoho zdroje – superrozlišení je snadné

rozlišení ...

PSF $|\psi(x)|^2$

optimální měření pro malé separace $\longrightarrow$ $\frac{d}{dx}\psi(x)$

impulsní odezva

gaussovská PSF $\longrightarrow$ projekce do HG_{01}

v kvantové analogii:

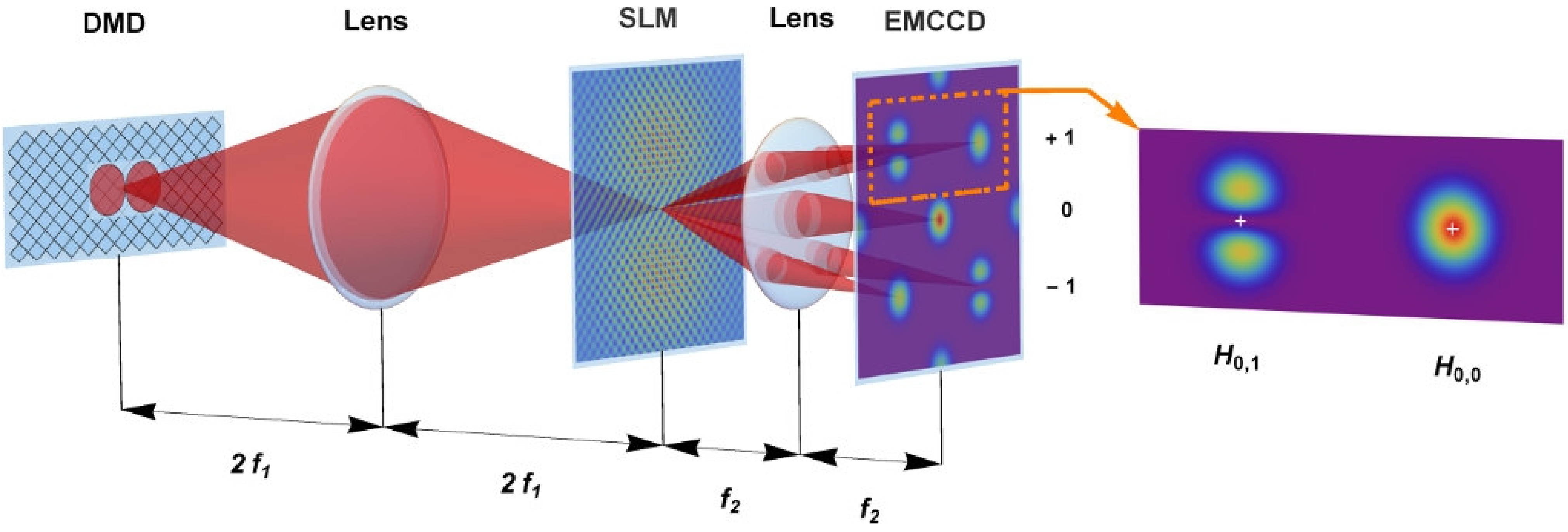
signál - směs posunutých koherentních stavů

optimální detekce

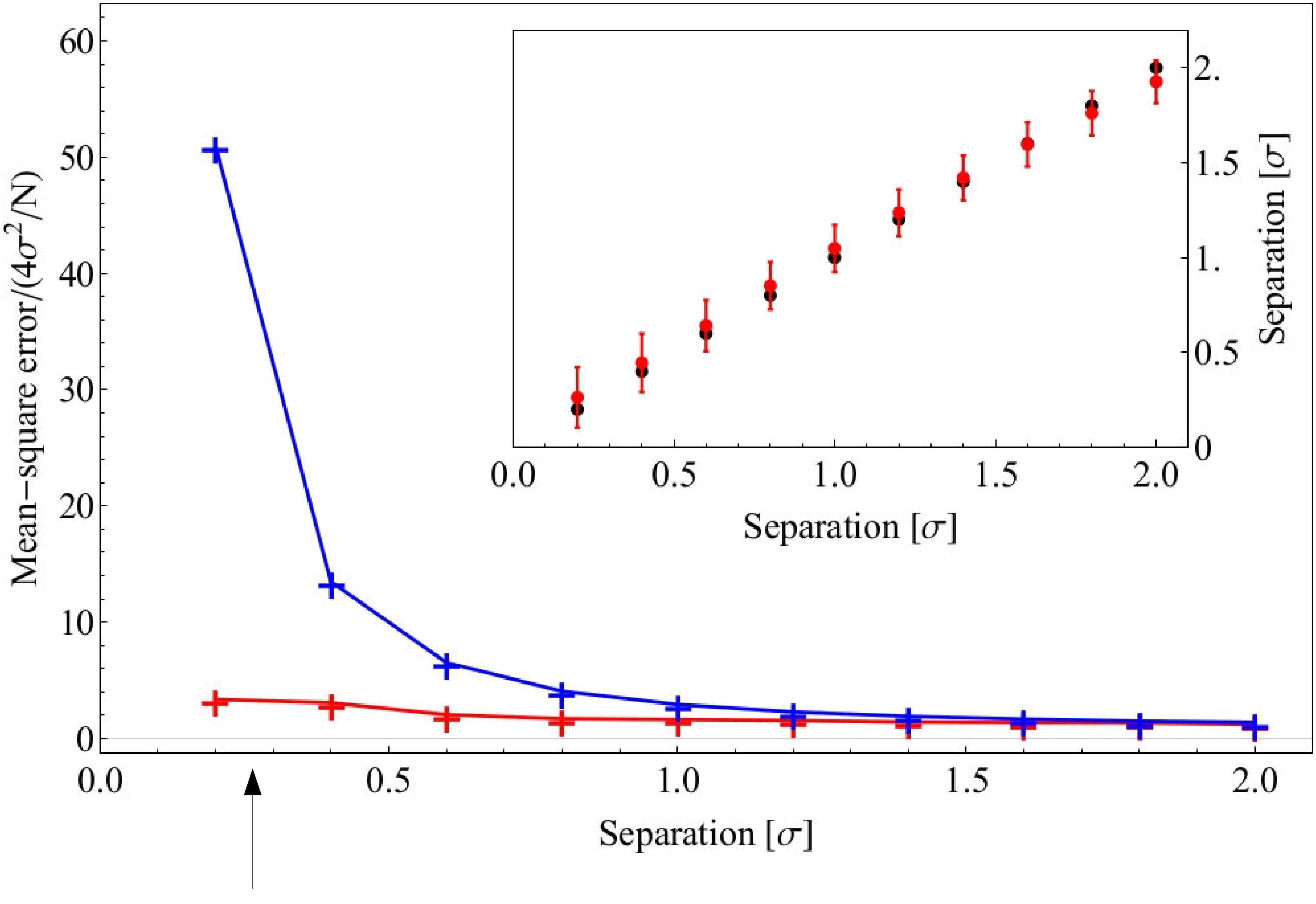
- měření počtu fotonů (M. Tsang ...NUT Singapore ... arXiv)
- 4-kanálové stavově-závislé měření (J.R.)

rozlišení

realizace optimálního měření s pomocí digitální holografie



rozlišení ...

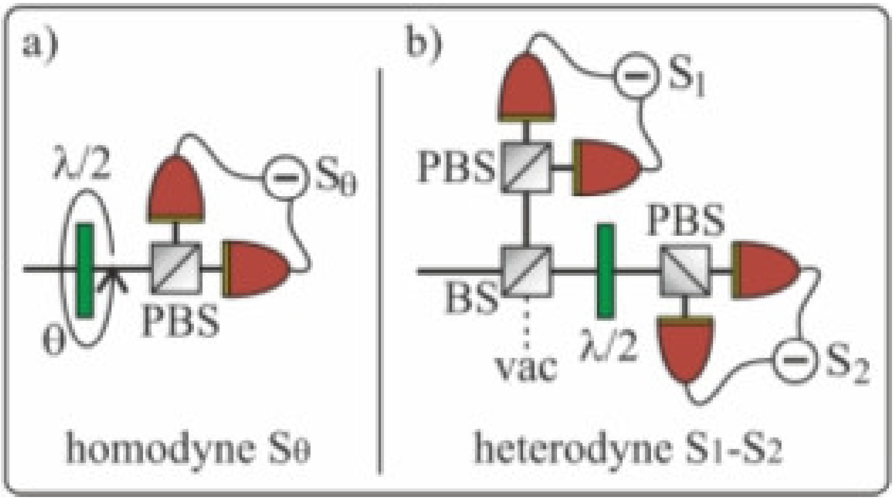


10% R.L.

zlepšení detekce přidáním šumu

dvojitá homodynní (heterodynní) detekce

- vzorkování Q-fce
- dělení svazku vnáší vakuový šum (–)
- jednodušší inverze (+)

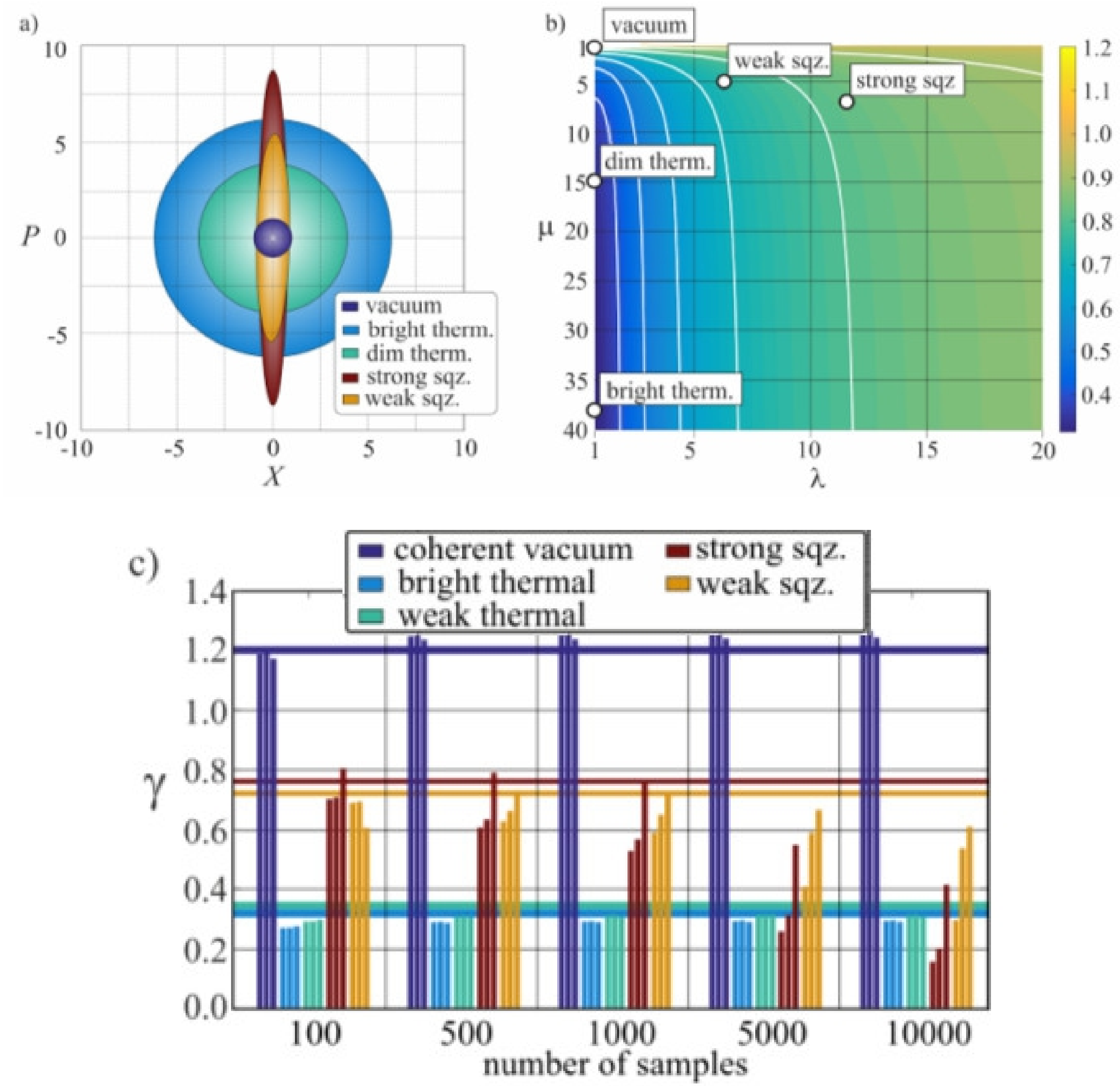


co je tedy lepší strategie?

faktory pracující pro heterodynní detekci

- signál není stav s minimální neurčitostí
- signál je stlačený
- detektor není perfektní

výsledky



a)
P
X
vacuum
bright therm.
dim therm.
strong sqz.
weak sqz.
b)
vacuum
weak sqz.
strong sqz
dim therm.
bright therm.
μ
λ
c)
coherent vacuum
bright thermal
weak thermal
strong sqz.
weak sqz.
γ
number of samples