MULTIPARTITNÍ KVANTOVÁ PROVÁZANOST

Ladislav Mišta

Katedra optiky, Univerzita Palackého, Česká Republika

FPF Slezské Univerzity, Opava, 24. 4. 2014

Název projektu: Mezinárodní centrum pro informaci a neurčitost
Registrační číslo: CZ.1.07/2.3.00/20.0060

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Kvantový bit (qubit)

Dimenze stavového prostoru $\mathcal{H}$ je 2, báze $|0\rangle,\ |1\rangle$.

Možný stav: $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$.

Fyzikální realizace:

- spin $\frac{1}{2}$: $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$
- dvouhladinový atom: $|g\rangle, |e\rangle$
- polarizace fotonu: $|H\rangle, |V\rangle$

Dva qubity

Qubity A a B, stavový prostor $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.

Kvantové korelace:

$$
\begin{aligned}
|\psi_-\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_A|1\rangle_B - |1\rangle_A|0\rangle_B\right) \qquad \text{(singletní stav)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|R\rangle_A|L\rangle_B - |L\rangle_A|R\rangle_B\right)
\end{aligned}
$$

$|R, L\rangle = \left(|0\rangle \pm i|1\rangle\right)/\sqrt{2}$.

Klasické korelace:

$$
\begin{aligned}
\hat{\rho}_{AB} &= \frac{1}{2}|0\rangle_A\langle 0| \otimes |1\rangle_B\langle 1| + \frac{1}{2}|1\rangle_A\langle 1| \otimes |0\rangle_B\langle 0| \\
&= \frac{1}{2}\left(|R\rangle_A\langle R| \otimes |L\rangle_B\langle L| + |L\rangle_A\langle L| \otimes |R\rangle_B\langle R|\right. \\
&\quad \left. + |R\rangle_A\langle R| \otimes |R\rangle_B\langle R| + |L\rangle_A\langle L| \otimes |L\rangle_B\langle L| + \ldots\right)
\end{aligned}
$$

Bipartitní kvantová provázanost

Čisté provázané (entanglované) stavy:

$$|\psi\rangle_{AB} \neq |\phi\rangle_A |\chi\rangle_B, \qquad |\phi\rangle_A, |\chi\rangle_B \in \mathcal{H}_{A,B}.$$

Např. singletní stav $|\psi_-\rangle_{AB}$.

Kritérium:

Je-li $\rho_A = \mathrm{Tr}_B \left(|\psi\rangle_{AB}\langle\psi| \right)$ smíšený $\Rightarrow$ $|\psi\rangle_{AB}$ je provázaný.

Smíšené provázané stavy:

- Separabilní stavy: $\hat{\rho}_{AB}^{\text{sep}} = \sum_i p_i \hat{\rho}_A^{(i)} \otimes \hat{\rho}_B^{(i)}$, $\hat{\rho}_{A,B}^{(i)} \in \mathcal{H}_{A,B}$.

  Lze vytvořit lokálními operacemi a klasickou komunikací (LOCC).

- Provázané stavy: $\hat{\rho}_{AB} \neq \hat{\rho}_{AB}^{\text{sep}}$.

Kritérium provázanosti (PPT kritérium):

$$\hat{\rho}_{AB} \text{ je separabilní} \Rightarrow \hat{\rho}_{AB}^{T_A} \geq 0,$$

$$\left(\hat{\rho}^{T_A}\right)_{m\mu,n\nu} = (\hat{\rho})_{n\mu,m\nu} \text{ (částečná transpozice (PT)).}$$

(A. Peres, PRL 77, 1413 (1996), M. Horodecki et al., PLA 223, 1 (1996).)

Tripartitní kvantová provázanost

Tři kvantové systémy A, B a C.

- Nový typ nelokality: $|GHZ\rangle = \frac{|000\rangle - |111\rangle}{\sqrt{2}}$ (GHZ 89')

$$\sigma_x^{(A)}\sigma_y^{(B)}\sigma_y^{(C)}|GHZ\rangle = \sigma_y^{(A)}\sigma_x^{(B)}\sigma_y^{(C)}|GHZ\rangle = \sigma_y^{(A)}\sigma_y^{(B)}\sigma_x^{(C)}|GHZ\rangle = |GHZ\rangle$$
$$\sigma_x^{(A)}\sigma_x^{(B)}\sigma_x^{(C)}|GHZ\rangle = -|GHZ\rangle.$$

EPR hypotéza: pro elementy reality m určující výsledky měření spinu platí

$$m_x^{(A)}m_y^{(B)}m_y^{(C)} = m_y^{(A)}m_x^{(B)}m_y^{(C)} = m_y^{(A)}m_y^{(B)}m_x^{(C)} = 1,$$
$$m_x^{(A)}m_x^{(B)}m_x^{(C)} = -1$$
$$\Rightarrow (m_x^{(A)})^2(m_y^{(A)})^2(m_x^{(B)})^2(m_y^{(B)})^2(m_x^{(C)})^2(m_y^{(C)})^2 = -1 \quad \text{což je spor.}$$

- Více tříd provázanosti:

1. Úplně provázané stavy provázanost $A-(BC), B-(AC)$, $C-(AB)$, $|GHZ\rangle$.

2. 1-qubitově biseparabilní: provázanost $A-(BC)$ a $B-(AC)$, $|\Psi_{-}\rangle_{AB}|0\rangle_{C}$.

3. 2-qubitově biseparabilní: provázanost $A-(BC)$.

4. 3-qubitově biseparabilní: separabilní všechna dělení, ale

$$\hat{\rho}_{ABC} \neq \sum_i p_i \hat{\rho}_A^{(i)} \otimes \hat{\rho}_B^{(i)} \otimes \hat{\rho}_C^{(i)}. \ (*)$$

5. Úplně separabilní stavy lze napsat jako $(*)$, $|0\rangle_A|0\rangle_B|0\rangle_C$.

(Dür et al PRA 99')

- Neekvivalentní třídy separability pro stochastické LOCC

$|\psi\rangle$ a $|\phi\rangle$ jsou ekvivalentní $\Leftrightarrow |\psi\rangle = A \otimes B \otimes C|\phi\rangle$, A, B, C reg.

$$|GHZ\rangle,\ |W\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle).$$

(Dür et al PRA 00')

- Nové provázané stavy s pozitivní částečnou transpozicí

PPT nestačí pro separabilitu. Existují PPT provázané stavy.

Nerozšířitelná součinová báze:
$\{|\psi_1\rangle = |0,1,+\rangle, |\psi_2\rangle = |1,+,0\rangle, |\psi_3\rangle = |+,0,1\rangle, |\psi_4\rangle = |-,-,-\rangle\}$
$|\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$.

$$\rho = \frac{1}{4}(I - \sum_{i=1}^{4} |\psi_j\rangle\langle\psi_j|)$$ PPT provázaný stav (třída 4).

(Dür et al PRA 00', Bennett et al PRL 99')

Aplikace:

- Konstrukce kvantových hradel (Gottesman et al Nature 99')
- Teleklonování (Murao et al PRA 99')

- Asistovaná teleportace (Karlsson et al PRA 98')

  ${}_C\langle +|GHZ\rangle_{ABC} \propto \frac{|00\rangle_{AB}+|11\rangle_{AB}}{\sqrt{2}}$ lze použít k teleportaci,

  $\sigma_z^{(B)}{}_C\langle -|GHZ\rangle_{ABC} \propto \frac{|00\rangle_{AB}-\sigma_z^{(B)}|11\rangle_{AB}}{\sqrt{2}} = \frac{|00\rangle_{AB}+|11\rangle_{AB}}{\sqrt{2}}$.

- Kvantové sdílení tajemství (Hillery et al PRA 99', Cleve et al PRL 99').

  Kvantový trit, báze $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$.

$$\begin{aligned} \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle &\rightarrow \alpha(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle) \\ &+ \beta(|012\rangle + |120\rangle + |201\rangle) \\ &+ \gamma(|021\rangle + |102\rangle + |210\rangle) \end{aligned}$$

Každý qutrit je úplně náhodný. Tajemství lze zrekonstruovat z libovolné dvojice. Korekce ztráty jednoho qutritu.

- Sdílení kvantové provázanosti (Choi et al PRA 13').

  Qutrit B stavu $\frac{|00\rangle_{AB}+|11\rangle+|22\rangle_{AB}}{\sqrt{3}}$ je tajemstvím rozděleným na tři části. Každá část individuálně nesdílí provázanost s A. Každá dvojice umožňuje dokonale zrekonstruovat provázanost s A.

- Distribuce provázanosti separabilními stavy (Cubitt et al PRL 03').

Spojité proměnné (CV)

Systémy s $\dim\mathcal{H} = \infty$.

Např.: lineární harmonický oscilátor, $\widehat{H} = \left(\widehat{x}^2 + \widehat{p}^2\right)/2$,

$\widehat{x}, \widehat{p}$, $[\widehat{x}, \widehat{p}] = i$ kanonické proměnné (spojité spektrum).

Fyz. realizace: mód elektromagnetického pole,
$\widehat{x}, \widehat{p}$ – kvadraturní operátory.

Wignerova funkce

N módů, fázový prostor $x_A, p_A, \ldots, x_N, p_N$;

$$\hat{\rho} \quad \rightarrow \quad W(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int e^{i\mathbf{x}'^T \cdot \mathbf{p}} \left\langle \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}'}{2} \right| \hat{\rho} \left| \mathbf{x} + \frac{\mathbf{x}'}{2} \right\rangle d^N \mathbf{x}',$$

$\mathbf{r} = (x_A, p_A, \ldots, x_N, p_N)^T$.

Gaussovské stavy:

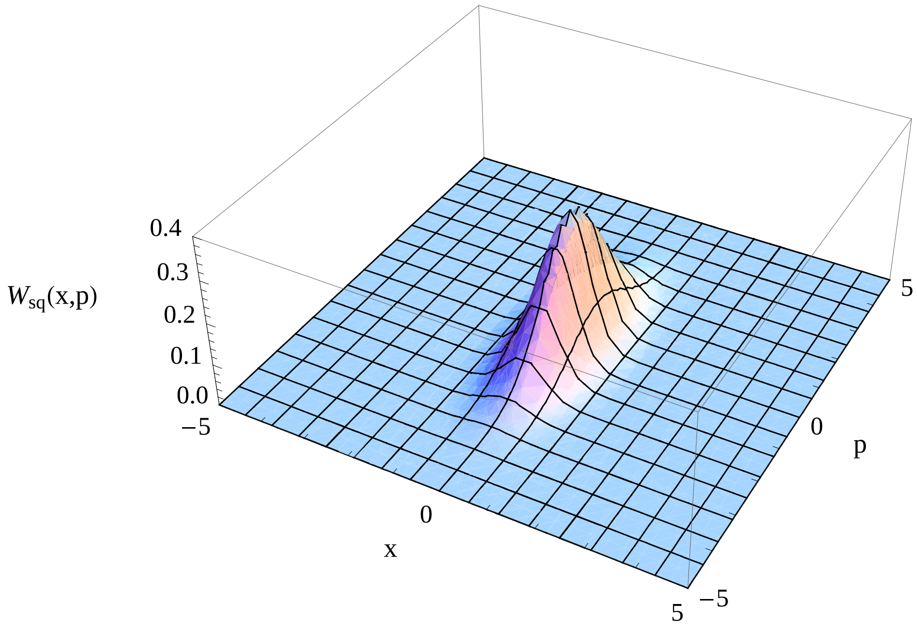
$$W(\mathbf{r}) = \frac{e^{-\mathbf{r}^T \gamma^{-1} \mathbf{r}}}{\pi^N \sqrt{\det \gamma}},$$

γ – kovarianční matice (KM),

$$\gamma_{ij} = \langle \hat{r}_i \hat{r}_j + \hat{r}_j \hat{r}_i \rangle, \quad \hat{\mathbf{r}} = (\hat{x}_A, \hat{p}_A, \ldots, \hat{x}_N, \hat{p}_N)^T.$$

γ je fyzikální KM $\Leftrightarrow \gamma + i\Omega_N \geq 0$, $\Omega_N = \oplus_{i=1}^N \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Příklad: stlačený stav $|r\rangle = e^{\frac{r}{2}\left[\hat{a}^2-(\hat{a}^\dagger)^2\right]}|0\rangle$, r – stlačovací parametr.



$$\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle = \frac{e^{-2r}}{2}, \quad \langle(\Delta\hat{p})^2\rangle = \frac{e^{2r}}{2}.$$

Fyzikální aproximace $|x=0\rangle$ ($|p=0\rangle$ for $-r$), $\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$, $\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$.

Kritéria gaussovské provázanosti:

1×1-módová kritéria:

Součinové kritérium

$$\langle (g\hat{x}_A + x_B)^2 \rangle \langle (g\hat{p}_A - p_B)^2 \rangle < \frac{(g^2+1)^2}{4} \text{ (Duan et al PRL 00'),}$$

nebo

A je provázané s B pro $\gamma_{AB} = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$, jestliže

$$\mu = \sqrt{\frac{\det A + \det B - 2\det C - \sqrt{(\det A + \det B - 2\det C)^2 - 4\det \gamma_{AB}}}{2}} < 1$$

(Vidal et al PRA 02').

1×2-módová kritéria:

PT vzhledem k módu j: $\hat{p}_j \to -\hat{p}_j$

$$\gamma \to \gamma^{(T_j)} = \Lambda_j \gamma \Lambda_j, \quad \Lambda_j = \sigma_z^{(j)} \oplus I \oplus I.$$

$$\text{Mód } j \text{ je separabilní ve stavu s KM } \gamma \Leftrightarrow \gamma^{(T_j)} + i\Omega_3 \geq 0,$$

(R. F. Werner et al PRL 86')

nebo

Mód j je separabilní ve stavu s KM $\gamma \Leftrightarrow \Sigma_j = I_3 - I_2 + I_1 - 1 < 0$,

kde $\det(\Omega\gamma^{(T_j)} - qI) = q^6 + I_1 q^4 + I_2 q^2 + I_3$

(Serafini PRL 06').

Dvoumódová gaussovská provázanost

Korespondence: $|0\rangle, |1\rangle \leftrightarrow \{|x\rangle\}_{x\in\mathbb{R}}$

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle) \leftrightarrow \{|p\rangle\}_{p\in\mathbb{R}}$$

Provazovací operace $CNOT \leftrightarrow$ dělič $\left(\hat{B}(1/\sqrt{2}), \frac{\hat{x}_A \pm \hat{x}_B}{\sqrt{2}}, \frac{\hat{p}_A \pm \hat{p}_B}{\sqrt{2}}\right)$

$$\hat{U}_{CNOT}|+\rangle|0\rangle = \frac{(|00\rangle + |11\rangle)}{\sqrt{2}} \leftrightarrow \hat{B}(1/\sqrt{2})|p=0\rangle|x=0\rangle \propto |EPR\rangle.$$

EPR stav módů A a B: $|EPR\rangle_{AB} = \int dx |x,x\rangle_{AB} = \int dp |p,-p\rangle_{AB}$.

Fyzikální aproximace: $|x=0\rangle \rightarrow |r\rangle$, $|p=0\rangle \rightarrow |-r\rangle$

Dvoumódové stlačené vakuum (TMSV)

$$|TMSV\rangle_{AB} = \hat{B}_{AB}(1/\sqrt{2})|r\rangle_A|-r\rangle_B \quad \rightarrow \quad |EPR\rangle_{AB} \quad \text{for} \quad r \rightarrow \infty.$$

Třímódová gaussovská provázanost

1. Úplně provázaný stav: CV GHZ

$$\hat{B}_{BC}(1/\sqrt{2})\hat{B}_{AB}(1/\sqrt{3})|p=0\rangle_A|x=0\rangle_B|x=0\rangle_C \propto \int |x,x,x\rangle dx$$

Fyzikální aproximace: nekonečné $r \rightarrow$ konečným r.

(van Loock et al PRL 00')

2. 1-módově biseparabilní stav: $|0\rangle_A|TMSV\rangle_{BC}$

nebo $\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{AB}^{(TMSV)} \oplus I_C + \alpha p_1 p_1^T + \beta p_2 p_2^T$, $\alpha = \beta = 0.1$,
$p_1 = (0,1,0,1,1,2)^T$, $p_2 = (1,0,-1,0,0,1)^T$.

3. 2-módově biseparabilní stav: $\gamma_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ (pouze smíšený).

4. 3-módově biseparabilní stav:

γ_{11} nebo $\gamma_{GHZ} + \delta I$, $\delta = \sqrt{\cosh^2(2r) + \frac{4}{3}\sqrt{2}\sinh(2r)} - \cosh(2r)$ (pouze smíšený).

5. Úplně separabilní stav: $|0\rangle_A|0\rangle_B|0\rangle_C$ nebo $\gamma_{GHZ} + \delta I$, $\delta \geq 1$ (Giedke et al PRA 01').

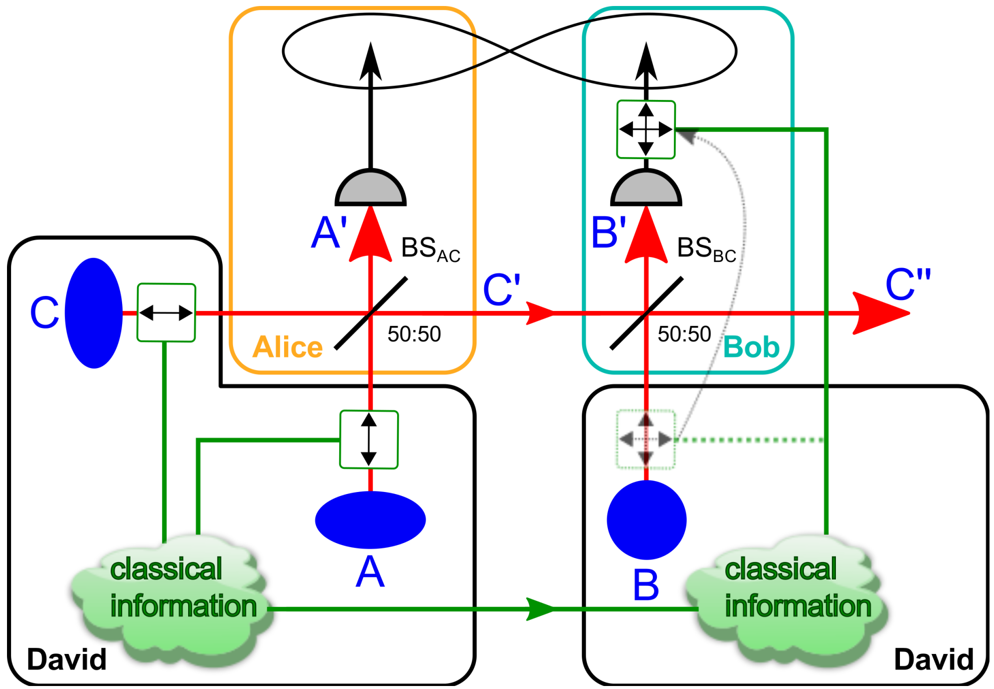
Většina aplikací využívá úplně provázané stavy, např.

- CV asistovaná teleportace (van Loock et al PRL 00').
- Sdílení CV kvantového tajemství (Tyc et al PRA 02').

Aplikace smíšených částečně provázaných stavů:

- Distribuce gaussovské provázanosti separabilními stavy (Mišta et al PRA 09').

Experimentální distribuce provázanosti



Krok 1: Úplně separabilní stav (třída 5).
$\gamma_{A,C} = \text{diag}(e^{\pm 2r}, e^{\mp 2r}), \gamma_B = I$.
$\hat{p}_A \to \hat{p}_A - \frac{u}{\sqrt{2}}, \hat{x}_C \to \hat{x}_C + \frac{v}{\sqrt{2}}, \hat{x}_B \to \hat{x}_B + v, \hat{p}_B \to \hat{p}_B + u, \langle {}^{u^2}_{v^2} \rangle = e^{2r} - 1.$

Krok 2: $BS_{AC} \to B-(AC)$ a $C-(AB)$ separabilita (třída 3).

Krok 3: $BS_{BC} \to$ provázanost A a B (třída 2).

Krok 2:

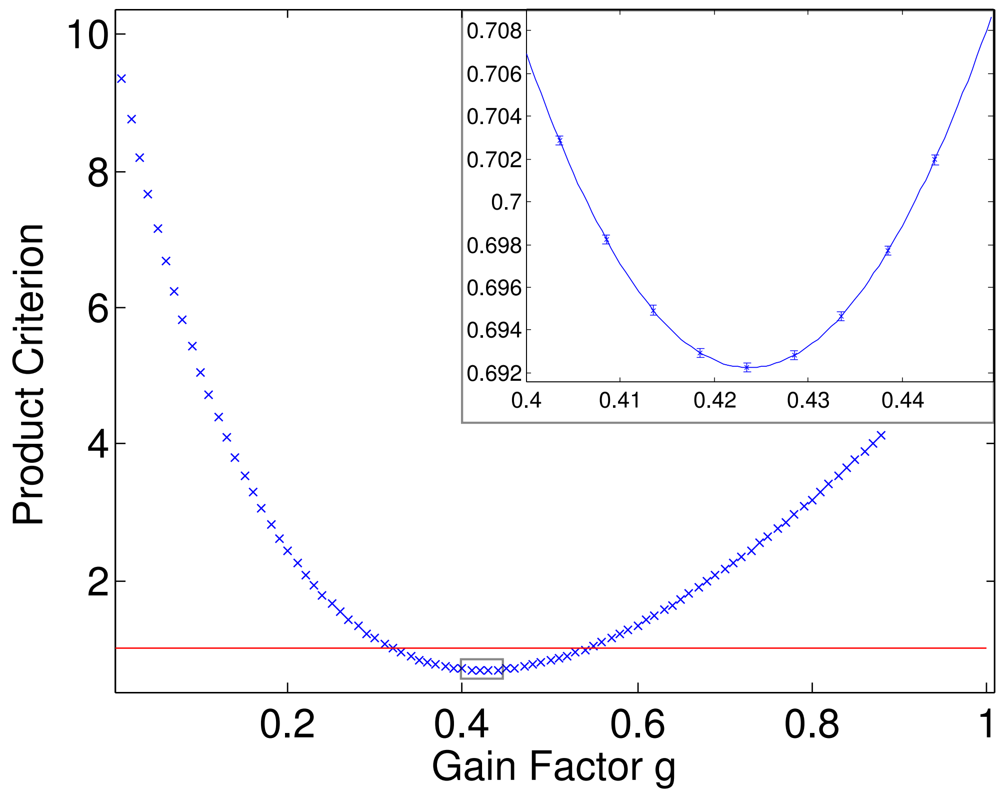
$$\gamma = \begin{pmatrix} 20.898 & 1.102 & -7.796 & -1.679 & 5.173 & -8.585 \\ 1.102 & 25.305 & 1.00 & 14.635 & -5.035 & -6.756 \\ -7.796 & 1.00 & 20.681 & 0.80 & 4.95 & -8.612 \\ -1.679 & 14.635 & 0.80 & 24.651 & 4.488 & 6.043 \\ 5.173 & -5.035 & 4.951 & 4.488 & 11.866 & -0.448 \\ -8.585 & -6.756 & -8.612 & 6.043 & -0.448 & 18.876 \end{pmatrix}.$$

Mineig $\left[\gamma^{(T_A)} + i\Omega_3\right] = -0.14$, A je provázané s (BC),

Mineig $\left[\gamma^{(T_B)} + i\Omega_3\right] = 0.35$, B je separabilní od (AC),

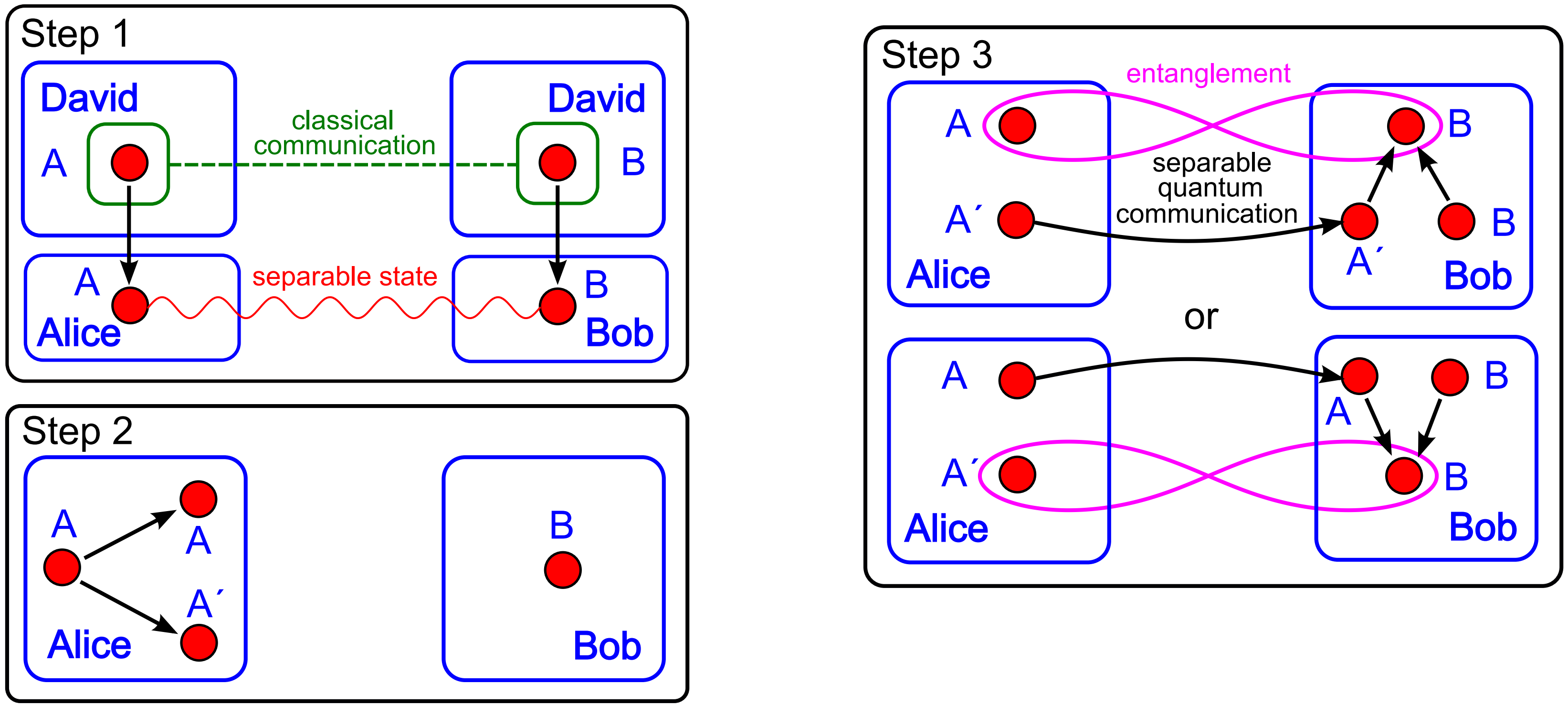
Mineig $\left[\gamma^{(T_C)} + i\Omega_3\right] = 0.53$, C je separabilní od (AB).

Krok 3:



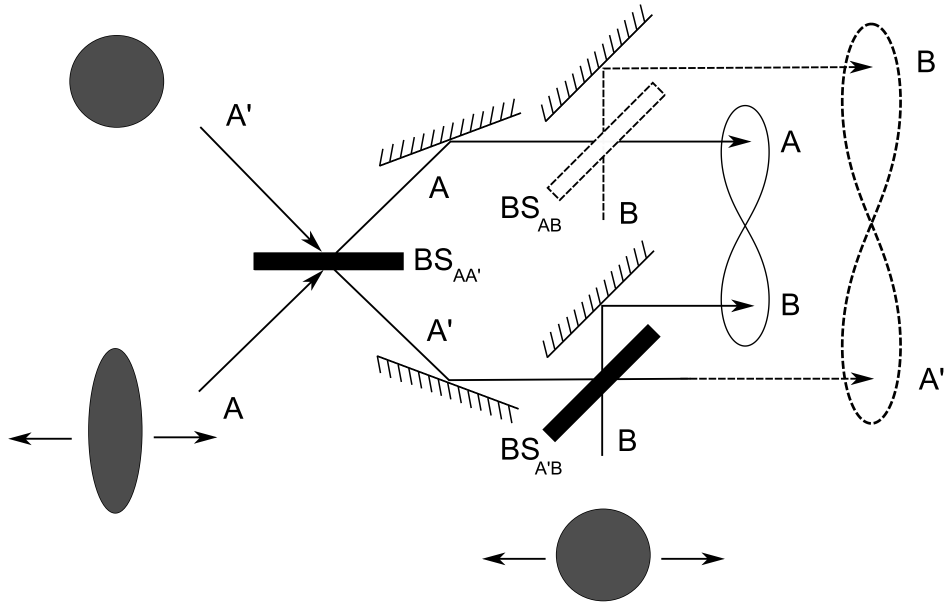
(Ch. Peuntinger, V. Chille, L. Mišta, Jr., N. Korolkova, M. Förtsch, J. Körger, C. Marquardt, and G. Leuchs, PRL **111**, 230506 (2013).)

Sdílení provázanosti se separabilními stavy



(Mišta PRA 13').

Schéma se stlačeným světlem



Krok 1: $\gamma_A = \text{diag}\left(e^{-2(r-\varepsilon)}, e^{2r}\right), \quad \gamma_{A'} = \gamma_B = I \quad$ (vakua),
r – stlačovací parametr, $\quad \varepsilon \geq 0$.

Gaussovská posunutí:

$$x_A \to x_A + \bar{x}, \quad x_B \to x_B - \bar{x}, \quad \langle \bar{x}^2 \rangle = \frac{1 - e^{-2r}}{2}.$$

Úplně separabilní stav (třída 5).

Krok 2: Dělič $BS_{AA'}$ provazuje $A-(A'B)$ a $A'-(AB)$ a nechává dělení $B-(AA')$ separabilní.

1-módově biseparabilní stav (třída 2). Žádná doumódová provázanost.

Krok 3: Dělič $BS_{A'B}$ **vytváří provázanost** $A-B$

nebo

dělič BS_{AB} **vytváří provázanost** $A'-B$.

pro $r > r_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{11e^{2\varepsilon}+8\sqrt{2}-13+\sqrt{(11e^{2\varepsilon}+8\sqrt{2}-13)^2+4e^{2\varepsilon}(8\sqrt{2}-1)}}{2(8\sqrt{2}-1)}\right].$

Úplně provázaný stav (třída 1).

Gaussovská lokalizovatelná provázanost

Gaussovské měření na $B \longrightarrow$ podmíněný stav $\tilde{\rho}_{AA'}$.

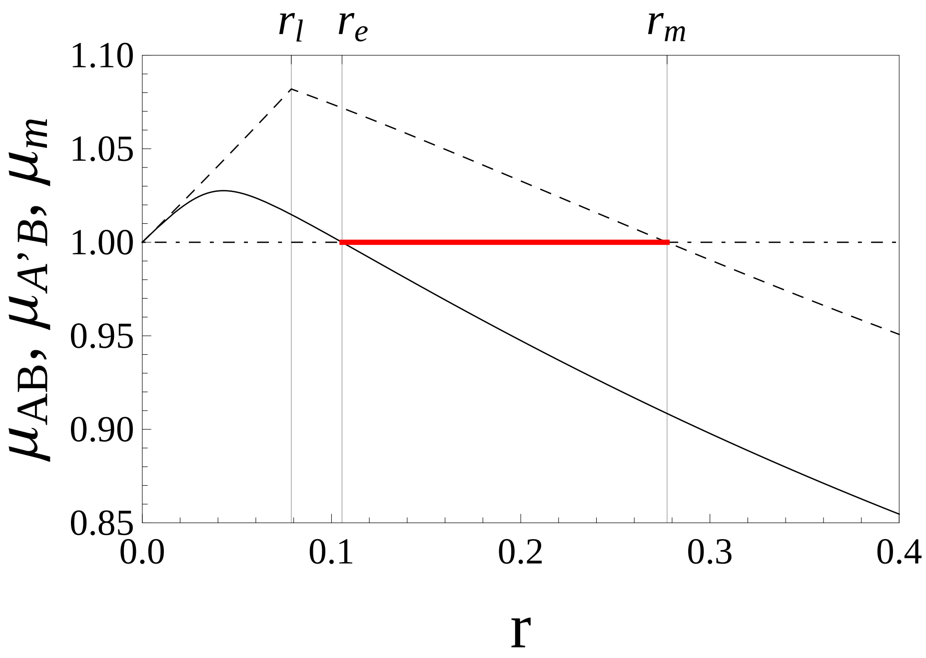
Pro jaké měření je $\tilde{\rho}_{AA'}$ maximálně provázaný? (Fiurášek et al PRA 07',Mišta et al PRA 08')

Maximalizujme logaritmickou negativitu $\max[0, -\log_2(\mu)]$, kde μ je nejmenší symplektická vlastní hodnota $\tilde{\rho}_{AA'}^{T_A}$.

Pro stav z kroku 2 je optimální měření $\{|x\rangle\}_{x\in\mathbb{R}}$ a provázanost lze lokalizovat jestliže

$$r > r_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\ln\left[e^{2\varepsilon} + \sqrt{e^{2\varepsilon}\left(e^{2\varepsilon} - 1\right)}\right].$$

Lokalizovatelnost provázanosti v SP

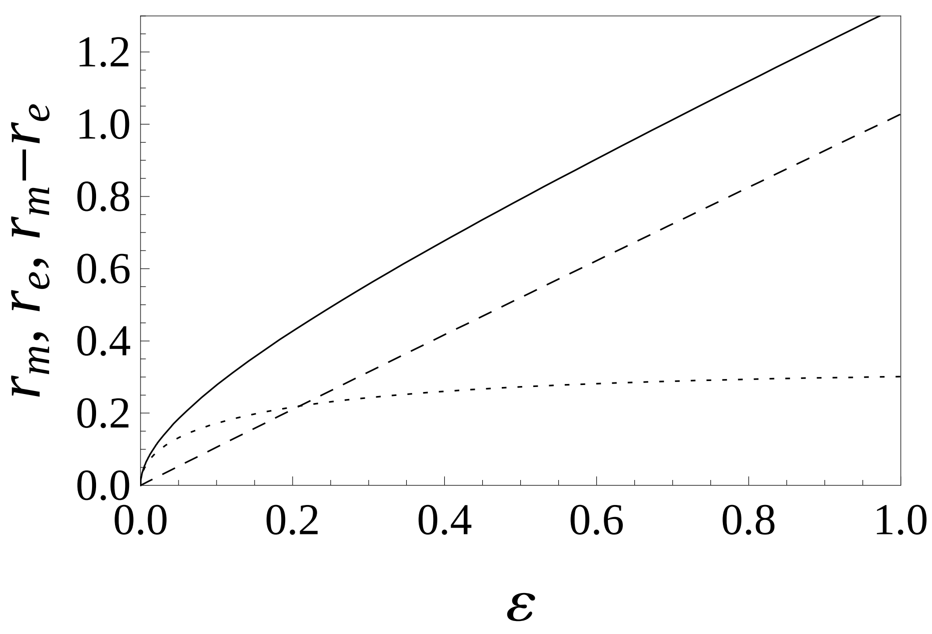


Souvislá křivka – nejmenší symplektická vlastní hodnota $\mu_{AB} = \mu_{A'B}$ stavů $\rho_{AB}^{T_B}$ a $\rho_{A'B}^{T_B}$ v kroku 3.

Čárkovaná čára – symplektická vlastní hodnota μ_{m} odpovídající maximální lokalizovatelné provázanosti.

$\varepsilon = 0.1$, interval nelokalizovatelnosti $r_{\mathrm{m}} \geq r > r_{\mathrm{e}}$.

Interval nelokalizovatelnosti



r_{m} – souvislá křivka, r_{e} – čárkovaná křivka,
$(r_{\mathrm{m}} - r_{\mathrm{e}})$ – tečkovaná křivka.

Závěr

- Nové aplikace částečné provázanosti tří módů.

- Přepínání mezi různými třídami separability operacemi na bipartitních podsystémech.

  1. $5 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ pro sdílení provázanosti se separabilními stavy.

  2. $5 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ pro distribuci provázanosti separabilními stavy.

- Stav z kroku 2 SP protokolu je kandidátem na nový typ tzv. nedestilovatelné provázanosti.

- Role neklasických korelací v separabilních stavech.