KVANTOVÁ PROVÁZANOST GAUSSOVSKÝCH STAVŮ

Ladislav Mišta

Katedra optiky, Univerzita Palackého, Česká Republika

Název projektu: Mezinárodní centrum pro informaci a neurčitost
Registrační číslo: CZ.1.07/2.3.00/20.0060

evropský sociální fond v ČR   EVROPSKÁ UNIE   MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY   OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Kvantová provázanost

Kvantový bit: dimenze stavového prostoru je 2, báze $|0\rangle$, $|1\rangle$.

Možný stav: $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$.

Fyzikální realizace:

- spin $\frac{1}{2}$: $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$
- polarizace fotonu: $|H\rangle, |V\rangle$
- dvouhladinový atom: $|g\rangle, |e\rangle$

Dva kvantové bity A a B

Kvantové korelace:

$$\begin{aligned} |\psi_-\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|H\rangle_A|V\rangle_B - |V\rangle_A|H\rangle_B\right) \quad \text{(singlet)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|R\rangle_A|L\rangle_B - |L\rangle_A|R\rangle_B\right) \end{aligned}$$

$$|R, L\rangle = \left(|H\rangle \pm i|V\rangle\right)/\sqrt{2}.$$

Klasické korelace:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{AB} &= \frac{1}{2}|H\rangle_A\langle H| \otimes |V\rangle_B\langle V| + \frac{1}{2}|V\rangle_A\langle V| \otimes |H\rangle_B\langle H| \\ &= \frac{1}{2}\left(|R\rangle_A\langle R| \otimes |L\rangle_B\langle L| + |L\rangle_A\langle L| \otimes |R\rangle_B\langle R|\right. \\ &\quad \left. + |R\rangle_A\langle R| \otimes |R\rangle_B\langle R| + |L\rangle_A\langle L| \otimes |L\rangle_B\langle L| + \ldots\right) \end{aligned}$$

Čisté provázané (entanglované) stavy:

$$|\psi\rangle_{AB} \neq |\phi\rangle_A |\chi\rangle_B, \qquad |\phi\rangle_A, |\chi\rangle_B \in \mathcal{H}_{A,B}.$$

Např. singletní stav

Kritérium: $\forall\, |\psi\rangle_{AB}$ $\exists$ Schmidtův rozklad

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i=0}^{1} s_i |i\rangle_A |i\rangle_B$$

$\left\{|i\rangle_{A,B}\right\}_{i=0}^{1}$ ON báze v $\mathcal{H}_{A,B}$, $s_i \geq 0$ – Schmidtův koeficient.

Stav je provázaný $\Leftrightarrow$ obě s_1 a s_2 jsou nenulová.

Smíšené stavy:

- Separabilní stavy: $\hat{\rho}_{AB}^{\text{sep}} = \sum_i p_i \hat{\rho}_A^{(i)} \otimes \hat{\rho}_B^{(i)}, \qquad \hat{\rho}_{A,B}^{(i)} \in \mathcal{H}_{A,B}.$

  Lze vytvořit lokálními operacemi a klasickou komunikací (LOCC).

- Provázané stavy: $\hat{\rho}_{AB} \neq \hat{\rho}_{AB}^{\text{sep}}.$

  Nelze vytvořit LOCC.

Kritérium provázanosti (PPT kritérium):

$$\hat{\rho}_{AB} \text{ je separabilní} \Rightarrow \hat{\rho}_{AB}^{T_A} \geq 0,$$

$$\left(\hat{\rho}^{T_A}\right)_{m\mu,n\nu} = (\hat{\rho})_{n\mu,m\nu} \text{ (částečná transpozice (PT)).}$$

(A. Peres, PRL 77, 1413 (1996), M. Horodecki et al., PLA 223, 1 (1996).)

Spojité proměnné

Systémy s dim$\mathcal{H} = \infty$.

Např.: lineární harmonický oscilátor, $\widehat{H} = \left(\widehat{x}^2 + \widehat{p}^2\right)/2$,

$\widehat{x}, \widehat{p}$, $[\widehat{x}, \widehat{p}] = i$ kanonické proměnné (spojité spektrum).

Fyz. realizace: mód elektromagnetického pole,

$\widehat{x}, \widehat{p}$ – kvadraturní operátory.

Wignerova funkce

N módů, fázový prostor $x_A, p_A, \ldots, x_N, p_N$;

$$\hat{\rho} \quad \rightarrow \quad W(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int e^{i\mathbf{x}'^T \cdot \mathbf{p}} \left\langle \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}'}{2} \right| \hat{\rho} \left| \mathbf{x} + \frac{\mathbf{x}'}{2} \right\rangle d^N \mathbf{x}',$$

$\mathbf{r} = (x_A, p_A, \ldots, x_N, p_N)^T$.

Gaussovské stavy:

$$W(\mathbf{r}) = \frac{e^{-(\mathbf{r}-\mathbf{d})^T \gamma^{-1} (\mathbf{r}-\mathbf{d})}}{\pi^N \sqrt{\det \gamma}},$$

$\mathbf{d} = \langle \hat{\mathbf{r}} \rangle$-posunutí, γ – kovarianční matice (KM),

$$\gamma_{ij} = \langle \Delta\hat{r}_i \Delta\hat{r}_j + \Delta\hat{r}_j \Delta\hat{r}_i \rangle, \quad \Delta\hat{r}_i = \hat{r}_i - \langle \hat{r}_i \rangle,$$

$\hat{\mathbf{r}} = (\hat{x}_A, \hat{p}_A, \ldots, \hat{x}_N, \hat{p}_N)^T.$

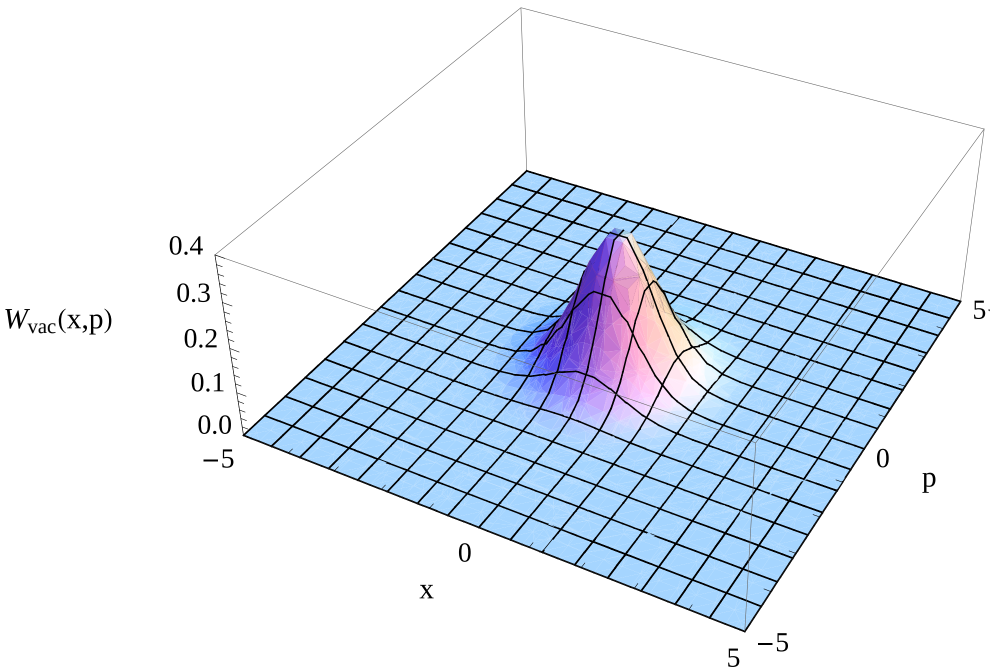
γ – $2N \times 2N$, reálná, symetrická, $\gamma > 0$.

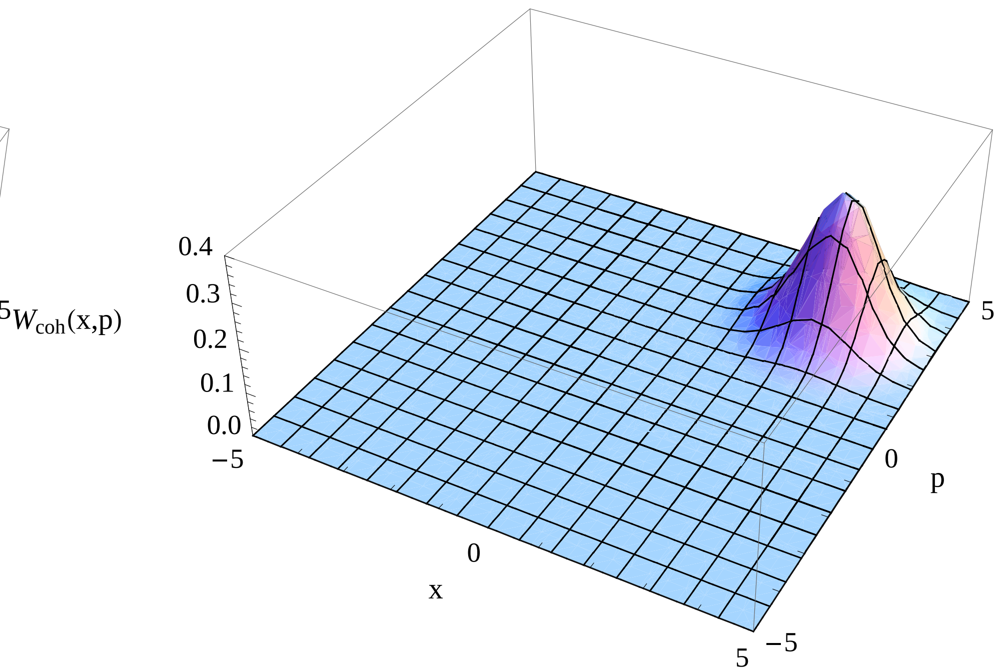
$[\hat{r}_i, \hat{r}_j] = i\Omega_{ij}, \quad \Omega = \oplus_{i=1}^{N} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (symplektická matice).

γ je KM stavu $\Leftrightarrow$ $\gamma + i\Omega \geq 0$ (princip neurčitosti).

Příklady gaussovských stavů

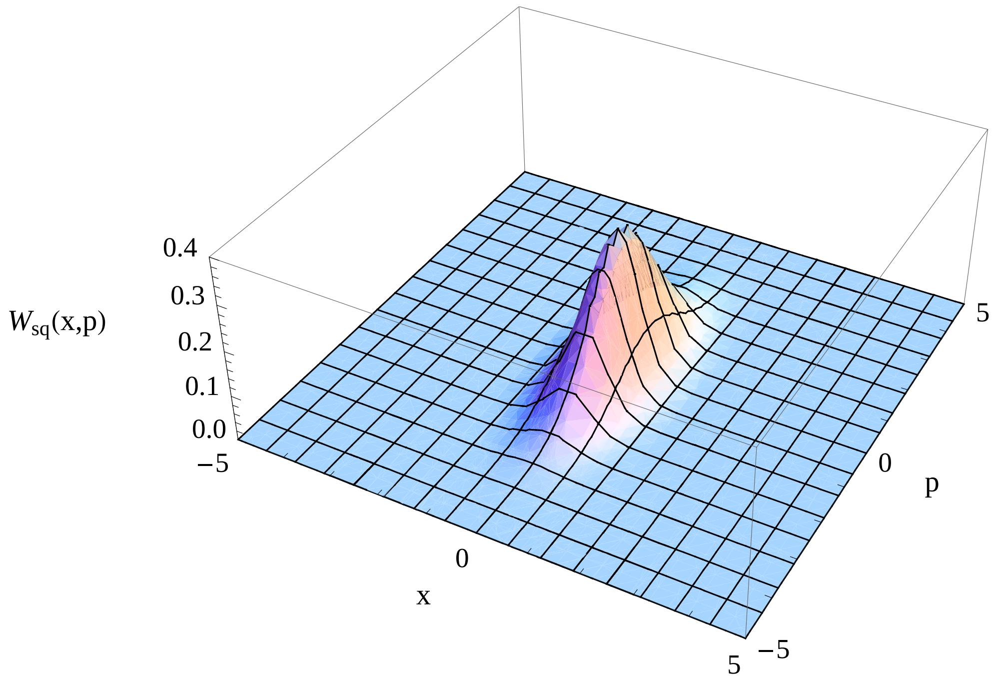
- Koherentní stav: $|\alpha\rangle$, $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, $\alpha \in \mathbb{C}$.





- Stlačený stav: $|r\rangle = \widehat{S}(r)|0\rangle$,

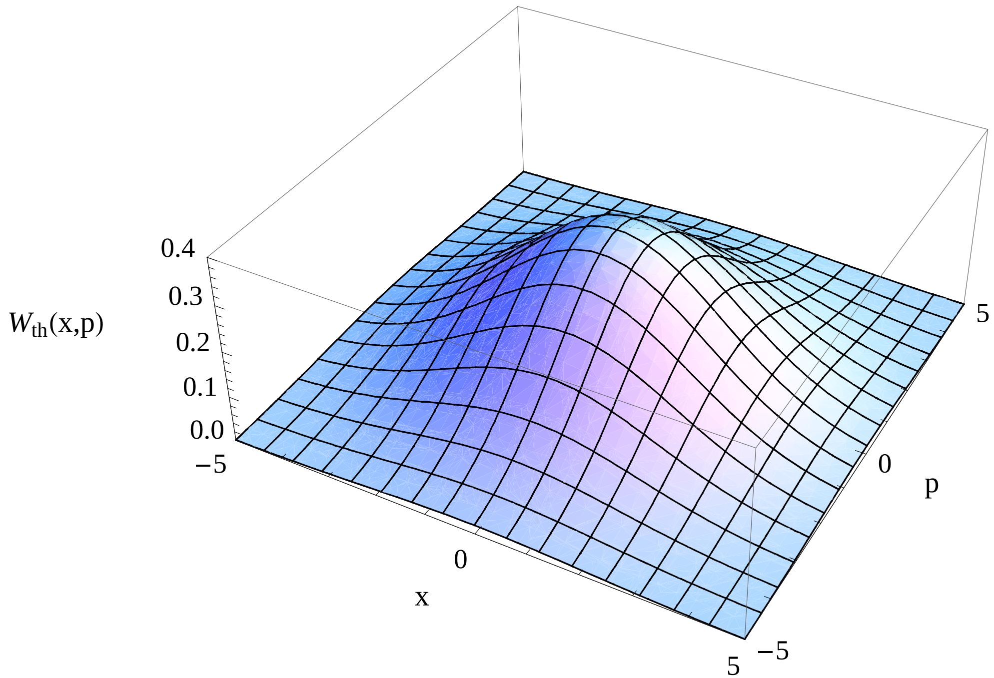
$\widehat{S}(r) = e^{\frac{r}{2}\left[\widehat{a}^2 - (\widehat{a}^\dagger)^2\right]}$ stlačovací operátor; r – parametr stlačení.



$$\langle(\Delta x)^2\rangle = \frac{e^{-2r}}{2}, \quad \langle(\Delta p)^2\rangle = \frac{e^{2r}}{2}.$$

Fyzikální aproximace $|x\rangle$ ($|p\rangle$ pro $-r$).

- Termální stav: $\hat{\rho}_{\mathrm{th}} = \frac{1}{1+\langle n\rangle} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\langle n\rangle}{1+\langle n\rangle} \right)^n |n\rangle\langle n|$,
  $\langle n\rangle$ – střední počet termálních fotonů.



Gaussovské unitární transformace

Kvadratický hamiltonián: $\hat{H} = \sum_{i,j} \kappa_{ij}\hat{r}_i\hat{r}_j \rightarrow \hat{\mathbf{r}}(t) = S(t)\hat{\mathbf{r}}(0)$

$S-$ reálná, $2N \times 2N$, $S\Omega S^T = \Omega$ (symplektická transformace).

Pasivní transformace: $SS^T = I$.

$$S_{\text{dělič}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}, \; \hat{x}'_A = \frac{\hat{x}_A + \hat{x}_B}{\sqrt{2}}, \quad \hat{x}'_B = \frac{\hat{x}_A - \hat{x}_B}{\sqrt{2}}.$$

Aktivní transformace: squeezer $S_{\text{sq}} = \text{diag}(e^{-r}, e^{r})$.

$$+$$

Posunutí: $\hat{x} \rightarrow \hat{x} + \bar{x}, \quad \hat{p} \rightarrow \hat{p} + \bar{p}.$

Symplektická diagonalizace

Williamsonův teorém: $\forall \gamma \geq 0 \quad \exists S, \quad S\Omega S^T = \Omega,$

$S\gamma S^T = \oplus_{i=1}^{N} \gamma_{\text{th}}(\langle n_j \rangle) = \text{diag}\,(s_1, s_1, \ldots, s_N, s_N)\,.$

$s_j = 1 + 2\langle \widehat{n}_j \rangle, \quad j = 1, 2, \ldots, N$–symplektické spektrum.

$P\,(\lambda) \equiv \det\,(\Omega\gamma - \lambda I) = 0, \quad \lambda = \pm i s_j.$

γ popisuje stav $\Leftrightarrow$ $s_j \geq 1, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, N.$

2 módy: $P\,(\lambda) = \lambda^4 + \Delta_1^2 \lambda^2 + \Delta_2^2$

$\Delta_1^2 = \det A + \det B + 2\det C, \quad \Delta_2^2 = \det\gamma$ (sympl. invarianty).

$$\gamma = \left(\begin{array}{cc} A & C \\ C^T & B \end{array} \right); \; s_{1,2} = \sqrt{\frac{\Delta_1^2 \pm \sqrt{\left(\Delta_1^2\right)^2 - 4\Delta_2^2}}{2}}.$$

Provázanost čistých gaussovských stavů

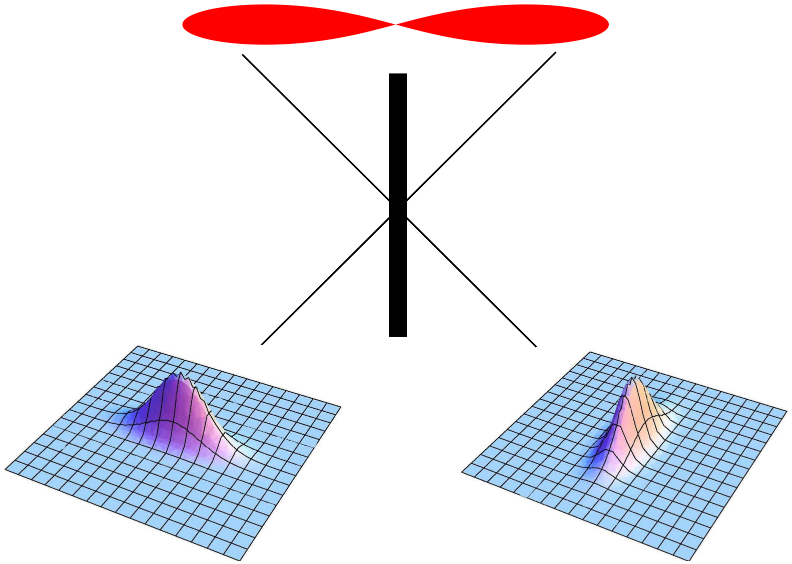
Dva módy A a B.

EPR – stav: $|EPR\rangle_{AB} = \int dx|x,x\rangle_{AB} = \int dp|p,-p\rangle_{AB}$.

$$\hat{x}_A - \hat{x}_B = 0, \quad \hat{p}_A + \hat{p}_B = 0.$$

Příprava: $\hat{U}_{\text{dělič}} \int dx|x\rangle|x=0\rangle \propto \int dx|x,x\rangle$

Fyzikální aproximace: dvoumódové stlačené vakuum (TMSV)

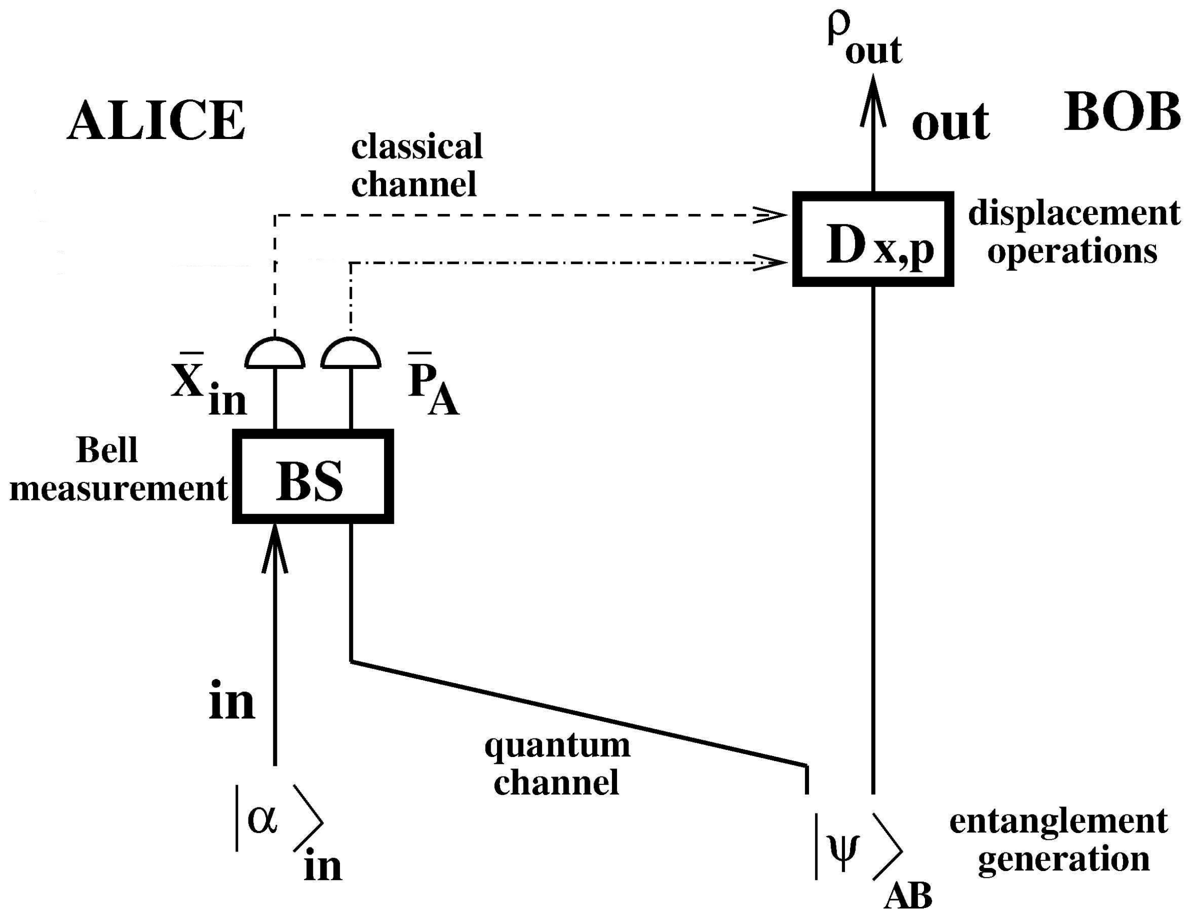


$$|TMSV\rangle_{AB} = \sqrt{1-\tanh^2(r)}\sum_{n=0}^{\infty}\tanh^n(r)|n,n\rangle_{AB}.$$

$$(\hat{x}_A - \hat{x}_B) = \sqrt{2}e^{-r}\hat{x}_B^{(0)}, \quad (\hat{p}_A + \hat{p}_B) = \sqrt{2}e^{-r}\hat{p}_A^{(0)}.$$

Čistý provázaný stav.

Kvantová teleportace



- Neznámé $|\alpha\rangle_{\text{in}}$ $(\hat{x}_{\text{in}}, \hat{p}_{\text{in}})$

- Sdílený stav $|\psi\rangle_{AB} = |TMSV\rangle_{AB}$

- Alice měří $\hat{x}_{\text{in}} = (\hat{x}_{\text{in}} - \hat{x}_A)/\sqrt{2}$, $\hat{p}_A = (\hat{p}_{\text{in}} + \hat{p}_A)/\sqrt{2}$

- Alice pošle výsledky měření $\bar{x}_{\text{in}}$ a $\bar{p}_A$ Bobovi

- Bob udělá posunutí $\hat{x}_B \to \hat{x}_B + \sqrt{2}\bar{x}_{\text{in}}, \quad \hat{p}_B \to \hat{p}_B + \sqrt{2}\bar{p}_A$

$$\hat{x}_{\text{out}} = \hat{x}_{\text{in}} - (\hat{x}_A - \hat{x}_B) = \hat{x}_{\text{in}} - \sqrt{2}e^{-r}\hat{x}_B^{(0)},$$
$$\hat{p}_{\text{out}} = \hat{p}_{\text{in}} + (\hat{p}_A + \hat{p}_B) = \hat{p}_{\text{in}} + \sqrt{2}e^{-r}\hat{p}_A^{(0)}.$$

Provázanost smíšených gaussovských stavů

$N \times M - N$ módů má Alice a M Bob.

PT vzhledem k módu j: $\widehat{p}_j \to -\widehat{p}_j$

$$\gamma \to \gamma^{(T_j)} = \Lambda_j \gamma \Lambda_j, \quad \Lambda_j = \mathrm{diag}(\underbrace{1,1}_{1}, \ldots \underbrace{1,-1}_{j}, \ldots, \underbrace{1,1}_{N}).$$

$1 \times M$ gaussovský stav je separabilní $\Leftrightarrow$ stav je PPT

(R. F. Werner and M. M. Wolf, PRL 86, 3658 (2001).)

$$\Leftrightarrow \gamma^{(T_A)} + i\Omega \geq 0$$

$$\Leftrightarrow s_i \geq 1, \; s_i \text{ sympl. vl. čísla } \gamma^{(T_A)}$$

Neplatí pro 2×2 kde $\exists$ gaussovský PPT provázaný stav.

$N \times M$ gaussovský stav je separabilní $\Leftrightarrow \exists$ KM $\gamma_{A,B}$

$$\gamma - \gamma_A \oplus \gamma_B \geq 0.$$

$\Rightarrow \hat{\rho} = \sum_k p_k \hat{\rho}_k, \;\; \hat{\rho}_k = \hat{\rho}_k^{(A)} \otimes \hat{\rho}_k^{(B)}, \;\; \gamma \leftrightarrow \hat{\rho}, \quad \gamma^k \leftrightarrow \hat{\rho}_k$ (blok. diag.)

$$\gamma - \sum_k p_k \gamma^k \geq 0, \quad \sum_k p_k \gamma^k = \gamma_A \oplus \gamma_B.$$

$\Leftarrow Q \equiv \gamma - \gamma_A \oplus \gamma_B \geq 0,$

$$W_\gamma(\mathbf{r_A}, \mathbf{r_B}) = \int W_Q(\mathbf{r'_A}, \mathbf{r'_B}) W_{\gamma_A}(\mathbf{r_A} - \mathbf{r'_A}) W_{\gamma_B}(\mathbf{r_B} - \mathbf{r'_B}) d\mathbf{r'_A} d\mathbf{r'_B}.$$

Struktura rozdělení W_Q:

$$W_Q(\mathbf{r}) \propto \exp\left(-\mathbf{r}^T Q^{-1}\mathbf{r}\right) \Pi_j \delta\left[(U\mathbf{r})_j\right],$$

Q^{-1} je pseudoinverze, U diagonalizuje Q, j probíhá nulová vl. čísla Q.

$$\Downarrow$$

Návod jak vyrobit sep. KM γ z KM $\gamma_A \oplus \gamma_B$.

Provázanost tří módů

Pro tři módy A, B a C $\exists$ pět tříd provázanosti:

1. Úplně neseparabilní: provázanost $A-(BC), B-(AC)$, $C-(AB)$.

2. 1-módově biseparabilní: provázanost $A-(BC)$ a $B-(AC)$.

3. 2-módově biseparabilní: provázanost $A-(BC)$.

4. 3-módově biseparabilní: separabilní pro všechna dělení, ale

$$\hat{\rho}_{ABC} \neq \sum_i p_i \hat{\rho}_A^{(i)} \otimes \hat{\rho}_B^{(i)} \otimes \hat{\rho}_C^{(i)}. \ (*)$$

5. Úplně separabilní: lze je napsat jako $(*)$.

Třídy 1-3 lze rozlišit PPT kritériem; 4 a 5 lze rozlišit kritériem:

$$\hat{\rho}_{ABC} \text{ je úplně separabilní} \Leftrightarrow \exists\ \gamma_{A,B,C},\ \gamma - \gamma_A \oplus \gamma_B \oplus \gamma_C \geq 0.$$

(G. Giedke et al., PRA 64, 052303 (2001))

Zajímavá vlastnost: $\exists$ sep. stav (třída 5), ve kterém lze A provázat s (BC) operací na (AC) (třída 3), ve kterém lze dále provázat B s (AC) operací na (BC) (třída 2).

Aplikace: Distribuce provázanosti separabilním kvantovým systémem.

(kvantové bity – T. S. Cubitt et al., PRL 03'.)

(gaussovské stavy – L. Mišta and N. Korolkova, PRA 09'.)

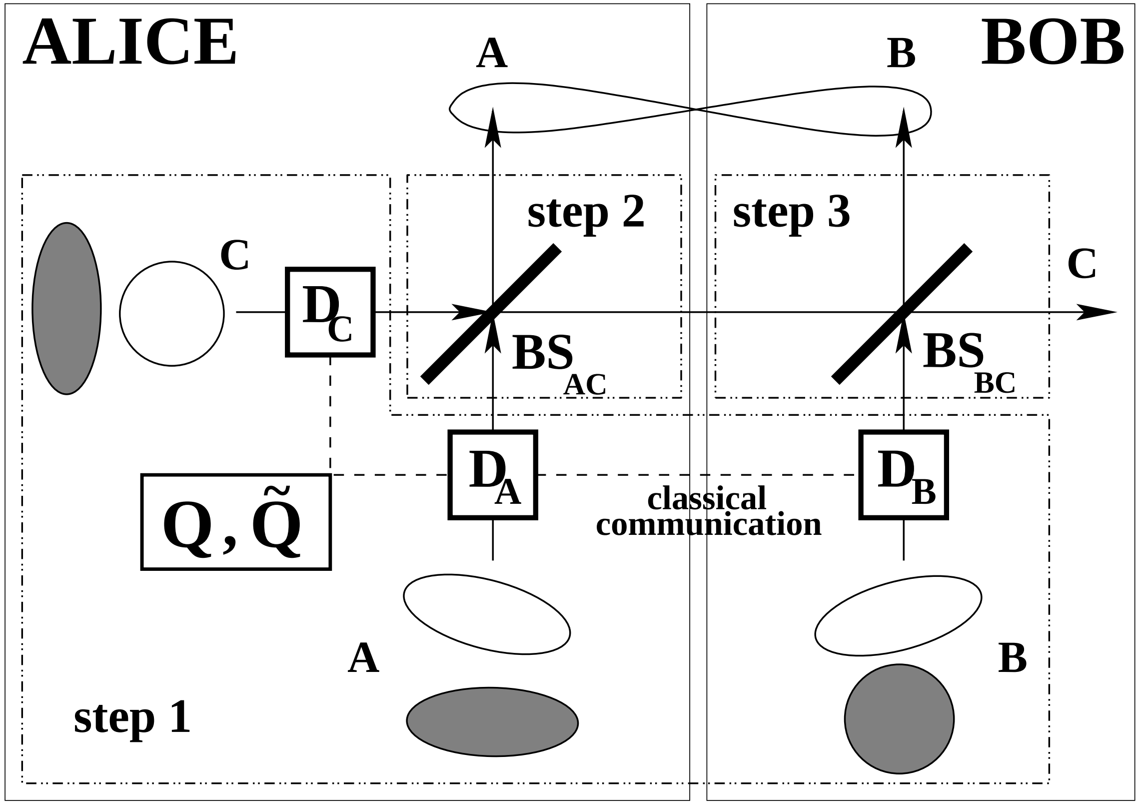
Gaussovský protokol

Konstrukce stavu třídy 3:

$$\gamma = \gamma_{AC}^{(TMSV)} \oplus I_B + x \left(q_1 q_1^T + q_2 q_2^T \right),$$

$$x = \frac{e^{2r}-1}{2};\ q_1 = (0,-1,0,2,0,-1)^T,\ q_2 = (1,0,2,0,-1,0)^T.$$

PPT kritérium: separabilita $B-(AC)$ a $C-(AB)$; provázanost $A-(BC)$.



Krok 1: Úplně separabilní stav (třída 5).

$\gamma_{A,C} = \mathrm{diag}(e^{\pm 2r}, e^{\mp 2r}), \gamma_B = I.$

$\hat{p}_A \to \hat{p}_A - \frac{u}{\sqrt{2}}, \hat{x}_C \to \hat{x}_C + \frac{v}{\sqrt{2}}, \hat{x}_B \to \hat{x}_B + v, \hat{p}_B \to \hat{p}_B + u, \langle {}^{u^2}_{v^2} \rangle = 2x.$

Krok 2: $BS_{AC} \to B-(AC)$ a $C-(AB)$ separabilita (třída 3).

Krok 3: $BS_{BC} \to$ provázanost A a B (třída 2) ($E_{\mathcal{N}} = 1.3$ ebitů).

Závěr

- Bipartitní a tripartitní provázanost gaussovských stavů.
- Distribuce gaussovské provázanosti separabilními stavy.
- Další využití: tripartitní gaussovská bound informace.